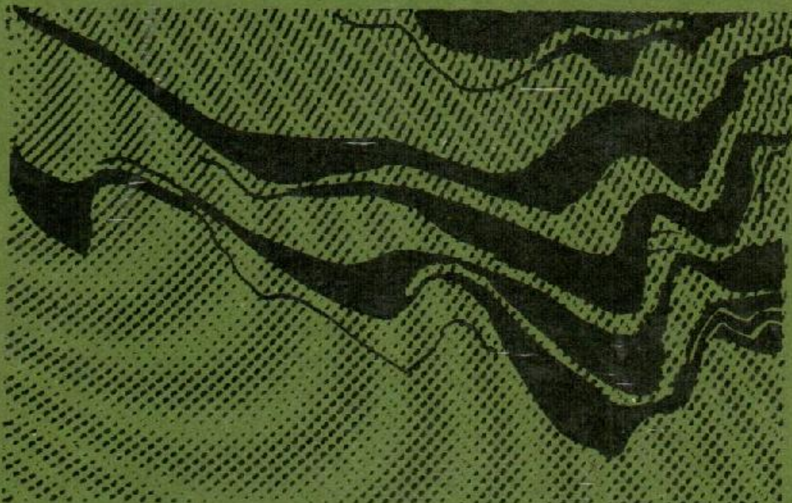
তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব



সাইদুর রহমান খান
ওসমান গণি তালুকদার
আব্দুস সোবহান

Web

তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব

(Electromagnetic Theory)

ড. সাইদুর রহমান খান
উপ-উপাচার্য

ড. ওসমান গণি তালুকদার
সহযোগী অধ্যাপক

ড. আব্দুস সোবহান
অধ্যাপক

ফলিত পদার্থবিজ্ঞান ও ইলেকট্রনিক্স বিভাগ
রাজশাহী বিশ্ববিদ্যালয়
রাজশাহী

বাংলা একাডেমী ঢাকা

প্রথম প্রকাশ
জ্যৈষ্ঠ ১৪০৫/জুন ১৯৯৮

বাএ (৯৭-৯৮ পাঠ্যপুস্তক : ভৌ ও প্র : ১১) ৩৭৯২

মুদ্রণ সংখ্যা : ১২৫০

পাণ্ডুলিপি প্রণয়ন ও মুদ্রণ তত্ত্বাবধান
ভৌতবিজ্ঞান ও প্রকৌশল উপবিভাগ
ভৌ ও প্র ১৮১

প্রকাশক

গোলাম মঈনউদ্দিন
পরিচালক
পাঠ্যপুস্তক বিভাগ
বাংলা একাডেমী, ঢাকা

মুদ্রক

ওবায়দুল ইসলাম
ব্যবস্থাপক
বাংলা একাডেমী প্রেস, ঢাকা

প্রচ্ছদ

হাশেম খান

মূল্য : ১৪০.০০

TORIT CHUMBAKIYA TATTWA (Electromagnetic Theory) by Dr. Saidur Rahman Khan, Pro-Vice Chancellor, Dr. Osman Gani Talukdar, Associate Professor, Dr. Abdus Sobhan, Professor, Department of Applied Physics and Electronics, Rajshahi University, Rajshahi. Published by Gholam Moyenuddin, Director, Textbook Division, Bangla Academy, Dhaka, Bangladesh. First edition : June 1998. Price : Taka 140.00

ISBN 984-07-3801-1

উৎসর্গ

যাদের পবিত্র রক্তে বাংলা ভাষা রাষ্ট্রীয় মর্যাদায় প্রতিষ্ঠিত
সেইসব ভাষা শহীদদের অমর স্মৃতির উদ্দেশে

ভূমিকা

মাতৃভাষায় শিক্ষাদান বিশ্বের প্রায় সকল দেশেই চালু আছে। বাংলা আমাদের মাতৃভাষা হওয়া সত্ত্বেও এদেশে শিক্ষার সকল স্তরে বিশেষ করে শিক্ষার উচ্চতর পর্যায়ে বাংলা ভাষায় পাঠদান চালু করা এখনও সম্ভবপর হয় নি। কারণ নানাবিধ ; তন্মধ্যে উল্লেখযোগ্য সুদীর্ঘকাল বাংলাদেশ নামের এই অঞ্চলটি বিভিন্ন উপনিবেশিক গোষ্ঠীর দ্বারা শাসিত হয়ে আসছিল। ১৯৭১ সালে রক্তক্ষয়ী সংগ্রামের মধ্য দিয়ে বাংলাদেশ স্বাধীনতা লাভের পর তৎকালীন সরকার বাংলা ভাষায় শিক্ষাদান এবং সকল স্তরে বাংলা চালু করার প্রথম উদ্যোগ গ্রহণ করেন। কিন্তু সেটা বেশিদিন স্থায়ী হতে পারে নি। প্রয়োজনীয় সরকারি পৃষ্ঠপোষকতা না থাকায় শিক্ষার উচ্চস্তরে বিশেষভাবে বিজ্ঞান শিক্ষার ক্ষেত্রে বাংলা ভাষায় পাঠ্যপুস্তক রচনায় উৎসাহী লেখকের উল্লেখযোগ্য আবির্ভাব ঘটে নি।

বাংলাদেশে মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে বাংলায় শিক্ষাদান বাধ্যতামূলক। উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়ার পর হাজার হাজার ছাত্র-ছাত্রী দেশের বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়, বি.আই.টি. ও চিকিৎসা মহাবিদ্যালয়ে ভর্তি হয়। আর সমস্যাটি দেখা দেয় তখনই। কারণ শিক্ষার এই সকল স্তরে বাংলায় পাঠ্যপুস্তক না থাকায় প্রথমেই তারা হোঁচট খায় এবং হতাশায় নিপতিত হয়।

তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব (Electromagnetic theory) পদার্থবিজ্ঞানের একটি অতীব গুরুত্বপূর্ণ শাখা। এই তত্ত্বের দ্বারা বেতার, টেলিভিশন, রাডার ইত্যাদি তরঙ্গ প্রবাহ নিয়ন্ত্রিত হয়ে থাকে। বাংলাদেশের প্রায় সকল বিশ্ববিদ্যালয়ে পদার্থবিজ্ঞান এবং ফলিত পদার্থবিজ্ঞান ও ইলেকট্রনিক্স বিভাগে স্নাতক সম্মান ও স্নাতকোত্তর পর্যায়ে পুস্তকটি পঠিত হয়। এছাড়া প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় এবং সকল বি.আই.টিতে তড়িৎ প্রকৌশল বিভাগের পাঠ্যসূচিতেও পুস্তকটি অন্তর্ভুক্ত আছে। তাই দীর্ঘদিন থেকে তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্বের উপর বাংলায় পাঠ্যপুস্তক রচনার বিষয়টি আমরা তীব্রভাবে অনুভব করে আসছিলাম. বাংলা ভাষায় বিজ্ঞান চর্চায় উৎসাহ প্রদান এবং উচ্চ মাধ্যমিক পাঠ্যান্তে সাধারণ বিশ্ববিদ্যালয়সমূহ, প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় ও সকল বি.আই.টি-তে সদ্য ভর্তিকৃত ছাত্র-ছাত্রীদের সমস্যার সমাধানকল্পে আমাদের এই সামান্য প্রয়াস। আমাদের জানামতে তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব বিষয়ের উপর বাংলা ভাষায় রচিত পুস্তক এটিই প্রথম। আমরা সাধ্যমত চেষ্টা করেছি সহজ, সরল ও প্রাঞ্জল ভাষায় বইটি রচনা করতে। বইটিতে মোট সাতটি অধ্যায় আছে। প্রায় সকল অধ্যায়ের শেষে বেশ কিছু সমাধানকৃত সমস্যা ও প্রশ্নমালা সংযোজিত হয়েছে।

এ পুস্তক রচনাকালে যারা আমাদেরকে বিভিন্নভাবে সাহায্য ও সহযোগিতা করেছেন, উৎসাহ যুগিয়েছেন এবং যে সকল গ্রন্থকারের গ্রন্থসমূহের সাহায্য নেয়া হয়েছে তাদের সকলকেই আমরা জানাই আন্তরিক ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা। যাঁদের

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

ভেক্টর বিশ্লেষণ

(Vector Analysis)

১.১ সূচনা

তড়িৎ চুম্বকীয় ঘটনাবলী বিশদভাবে আলোচনা করতে যে গাণিতিক সাহায্যের প্রয়োজন তার জন্য ভেক্টর বিশ্লেষণের চিহ্নগুলির প্রয়োগ অত্যন্ত ফলপ্রসূ। এ অধ্যায়ে এটি সংক্ষেপে মৌলিক ভেক্টর বিশ্লেষণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এটি তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্র বুঝার জন্য যথেষ্ট সহায়ক হবে।

স্কেলার (Scalar) **রাশি :** যে সকল প্রাকৃতিক রাশির শুধু মান আছে কিন্তু দিক নেই সেগুলিকে স্কেলার রাশি বলে। যেমন— সময়, আয়তন, ঘনত্ব ইত্যাদি। স্কেলার রাশির সম্প্রসারিত ধারণা হলো স্কেলার ক্ষেত্র (scalar field)। এটি অবস্থানের ফাংশন হিসেবে কাজ করে এবং কোনো স্থানের সব বিন্দুতে অবস্থানের মান দ্বারা নির্ধারিত হয়ে থাকে।

ভেক্টর (Vector) **রাশি :** যে সকল প্রাকৃতিক রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে সেগুলিকে ভেক্টর রাশি বলে। যেমন— বেগ, বল, তড়িৎ ক্ষেত্র (Electric field intensity) ইত্যাদি। ভেক্টর রাশির সম্প্রসারিত ধারণা হলো ভেক্টর ক্ষেত্র (vector field)। এটি অবস্থানের ফাংশন নির্ণয় করে এবং কোনো স্থানের সব বিন্দুতে অবস্থানের মান ও দিক দ্বারা নির্ধারিত হয়ে থাকে। এখানে উল্লেখ্য যে ভেক্টর রাশিগুলিকে মোটা অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে।

একক ভেক্টর (Unit Vector) : একক ভেক্টর হলো এমন একটি ভেক্টর যার মান এক। যদি $\mathbf{A}$ একটি ভেক্টর রাশি হয় এবং এর মান $A \neq 0$, তবে $\mathbf{A}/A$ একটি একক ভেক্টর যার দিক $\mathbf{A}$ এর দিকে হবে। সংকেতাকারে লেখা যায় $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$; এখানে $\mathbf{a}$ একক ভেক্টর।

১.২ ভেক্টর বীজগণিত (Vector Algebra)

আমরা এখানে ত্রিমাত্রাবিশিষ্ট কার্টেজীয় স্থানাংক সিস্টেম (Three dimensional cartesian coordinate system) ব্যবহার করবো। একটি ভেক্টরকে এর উপাংশ দ্বারা পরস্পর অভিলম্বিক যে কোনো তিনটি অক্ষ বরাবর প্রকাশ করা যায়। যেমন $\mathbf{A}$ ভেক্টরের উপাংশ A_1, A_2 ও A_3। এখানে A_1, A_2 ও A_3 যথাক্রমে x, y, z অক্ষের সমান্তরাল। আবার ভেক্টর $\mathbf{A}$ কে একক ভেক্টর $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ও $\mathbf{k}$ দ্বারা এর উপাংশে প্রকাশ করা যায়।

যেমন
$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \qquad (১.১)$$

$\mathbf{A}$ ভেক্টরের মানকে তিনটি ভেক্টরের মান A_1, A_2, A_3 দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

যেমন
$$A = \left|\mathbf{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \qquad (১.২)$$

দুটি ভেক্টরের যোগফল এদের উপাংশের যোগফল হিসেবে পাওয়া যায়,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k} \qquad (১.৩)$$

একইভাবে দুটি ভেক্টরের বিয়োগফল এদের উপাংশের বিয়োগফল হিসেবে পাওয়া যায়,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_1 - B_1)\mathbf{i} + (A_2 - B_2)\mathbf{j} + (A_3 - B_3)\mathbf{k} \qquad (১.৪)$$

এখন আমরা গুণন পদ্ধতি আলোচনা করব। সবচেয়ে সহজ গুণন হলো স্কেলার গুণন (Scalar multiplication)। যদি C একটি স্কেলার এবং **A** একটি ভেক্টর হয় তবে গুণফল **CA** একটি ভেক্টর **B** = C**A**,

অর্থাৎ $\mathbf{B}_1 = C\mathbf{A}_1,\ \mathbf{B}_2 = C\mathbf{A}_2$ এবং $\mathbf{B}_3 = C\mathbf{A}_3$

এটি স্পষ্ট যে যদি **A** একটি ভেক্টর ক্ষেত্র এবং **C** একটি স্কেলার ক্ষেত্র হয় তবে **B** একটি নতুন ভেক্টর ক্ষেত্র।

১.২.১ স্কেলার বা ডট গুণন (Scalar or dot product) : দুটি ভেক্টর **A** ও **B** এর ডট বা স্কেলার গুণন (**A.B**) কে **A** ও **B** এর মান এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ এর কোসাইন এর গুণফল দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = AB\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad (১.৫)$$

এখানে উল্লেখ্য যে **A** ও **B** পৃথকভাবে ভেক্টর হলেও (**A.B**) একটি স্কেলার রাশি। নিম্নোক্ত সূত্রগুলি ডট বা স্কেলার গুণনের জন্য সিদ্ধ :

(১) $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$ বিনিময় সূত্র

(২) $\mathbf{A}.(\mathbf{B}.\mathbf{C}) = \mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{A}.\mathbf{C}$ বণ্টন সূত্র

(৩) $m(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = (m\mathbf{A}).\mathbf{B} = \mathbf{A}.(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}.\mathbf{B})m$ এখানে m স্কেলার রাশি

(৪) $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1,\ \mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0$

(৫) $(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$

$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

(৬) যদি $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$ এবং **A** ও **B** শূন্য ভেক্টর না হয় তবে **A** এবং **B** অভিলাম্বিক।

১.২.২ ভেক্টর বা ক্রস গুণন (Vector or cross product) : **A** ও **B** ভেক্টরের ভেক্টর বা ক্রস গুণন হলো একটি ভেক্টর **C** = **A** × **B**

A ও **B** ভেক্টরের মান এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের (θ) সাইন এর গুণফলকে **A** × **B** এর মান হিসেবে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad (১.৬)$$

C = **A** × **B** ভেক্টরের দিক **A** ও **B** ভেক্টরের সমতলের উপর অভিলম্বিক এবং এমনভাবে অবস্থিত যেন **A**, **B** ও **C** একটি ডানহাতি সিস্টেম গঠন করে। যদি **A** = **B** বা **A** ও **B** সমান্তরাল হয় তবে **A** × **B** = 0।

নিম্নোক্ত সূত্রগুলি ক্রস বা ভেক্টর গুণনের জন্য সিদ্ধ :

(১) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ বিনিময় সূত্র

(২) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ বন্টন সূত্র

(৩) $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \times m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$, m একটি স্কেলার

(৪) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

(৫) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$

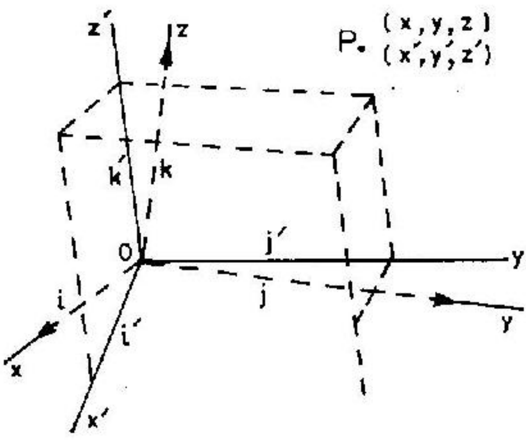
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{J} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

(৬) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A.C})\mathbf{B} - (\mathbf{A.B})\mathbf{C}$

১.৩ অপরিবর্তন (Invariance)

যে রাশি কোনো স্থানাংক সিস্টেমের উপর নির্ভরশীল নয় তাকে অপরিবর্তনীয় (Invariant) বলে।

ধরা যাক, দুটি আয়তক্ষেত্রাকার স্থানাংক সিস্টেম (x, y, z) ও (x′, y′, z′) এবং এদের উৎস একই বিন্দু O তে অবস্থিত (চিত্র ১.১)। কিন্তু অক্ষগুলি একে অপরের তুলনায় ঘূর্ণিত হয়েছে।



চিত্র ১.১ : একই উৎস বিন্দু O তে অবস্থিত দুটি আয়তক্ষেত্রাকার স্থানাংক সিস্টেম (x, y, z) ও (x′, y′, z′) যাদের অক্ষগুলো একে অপরের তুলনায় ঘূর্ণিত হয়েছে।

P যে কোনো একটি বিন্দু যার স্থানাংক (x,y,z) বা এর আপেক্ষিক (x′,y′,z′)। এ দুটি স্থানাংকের মধ্যেকার রূপান্তরের সমীকরণগুলি হবে

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}\right\} \qquad (১.৭)$$

যেখানে ajk, j,k = 1,2,3 কে x,y,z অক্ষের প্রেক্ষিতে x′, y′,z′ অক্ষের দিক কোসাইন (direction cosine) হিসেবে দেখানো হয়েছে। (১.৬) সমীকরণে বর্ণিত রূপান্তরকে অভিলাম্বিক রূপান্তর (Orthogonal transformation) বলা হয়।

ভৌতিকভাবে কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে নির্ণীত স্কেলার ক্ষেত্র $\varnothing(x,y,z)$ ঐ বিন্দুর স্থানাংকের উপর নির্ভরশীল নয়। যদি $\varnothing(x,y,z) = \varnothing'(x', y',z')$ হয়, যেখানে (x,y,z) এবং (x', y',z') (১.৬) সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত, তবে আমরা $\varnothing(x,y,z)$ কে উক্ত রূপান্তরের পরিপ্রেক্ষিতে অপরিবর্তনীয় বলে থাকি।

উদাহরণস্বরূপ $x^2 + y^2 + z^2$ (১.৬) রূপান্তরের অধীনে পরিবর্তনশীল, কারণ

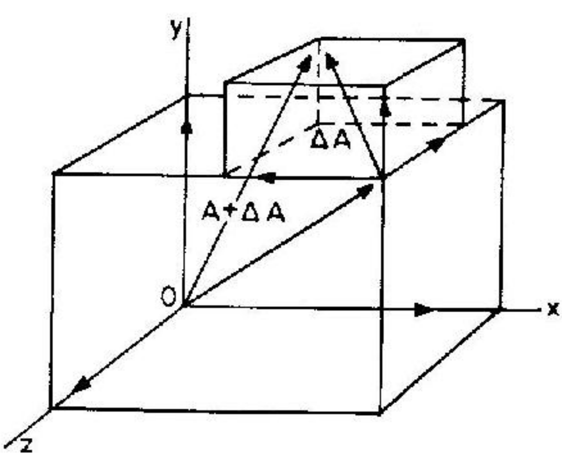
$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

একইভাবে যদি $\mathbf{A}(x,y,z) = \mathbf{A}'(x', y',z')$ হয় তবে ভেক্টর ক্ষেত্র $\mathbf{A}(x,y,z)$ কে অপরিবর্তনীয় বলা হয়। এটি সত্য হবে যদি

$$A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k}$$
$$= A'_1(\,(x', y',z')\mathbf{i} + A'_2(x', y',z')\mathbf{j} + A'_3(x', y',z')\mathbf{k}$$

১.৪ সময় ডেরিভেটিভ (Time Derivative)

আমরা প্রায়ই সময় ও স্থানের সাথে স্কেলার ও ভেক্টর রাশির পরিবর্তনের হার সংক্রান্ত সমস্যাবলীর সম্মুখীন হয়ে থাকি। ভেক্টর রাশির সময় ডেরিভেটিভ খুবই সহজ।



চিত্র ১.২ : একটি ভেক্টর A – এর বৃদ্ধি এবং উপাংশসমূহ।

চিত্রে Δt সময়ে **A** ভেক্টরের পরিবর্তন হয়েছে $\Delta \mathbf{A}$ যা সাধারণভাবে মান ও দিক উভয়ের পরিবর্তনই বুঝায়। যেহেতু $\Delta \mathbf{A}$ এর উপাংশ $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$ যা সাধারণভাবে মান ও দিক উভয়েরই পরিবর্তনই বুঝায়। $\Delta \mathbf{A}$ এর উপাংশ $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$,

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_1 \mathbf{i} + \Delta A_2 \mathbf{j} + \Delta A_3 \mathbf{k} \tag{১.৮}$$

এখন $\Delta \mathbf{A}$ কে Δt দ্বারা ভাগ করে এবং গতানুগতিক পদ্ধতিতে সীমা নিয়ে আমরা পাই dA/dt এর সংজ্ঞা

$$\frac{dA}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \Delta(t)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta A_1 \mathbf{i} + \Delta A_2 \mathbf{j} + \Delta A_3 \mathbf{k}}{\Delta \mathbf{t}}$$

$$= \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} \tag{১.৯}$$

এরূপে একটি ভেক্টরের সময় ডেরিভেটিভ হলো এর উপাংশের সময় ডেরিভেটিভ এর যোগফলের সমান।

১.৫ ডেল (Del, ∇)

ভেক্টর ব্যবকলনী (Differential) কারক ∇ কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{১.১০}$$

এই ভেক্টর কারকের ধর্ম ভেক্টরেরই মত।

১.৬ গ্রাডিয়েন্ট (Gradient)

মনে করি $\varnothing(x,y,z)$ একটি ব্যবকলনী যোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র। তাহলে $\varnothing$ এর গ্রাডিয়েন্ট (যা $\nabla\varnothing$ দ্বারা লেখা হয়) এভাবে প্রকাশ করা হয়,

$$\nabla\varnothing = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varnothing = \mathbf{i}\frac{\partial\varnothing}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varnothing}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varnothing}{\partial z} \tag{১.১১}$$

ভেক্টর **A** এর উপাংশগুলি স্থানাংকের অক্ষ বরাবর সময়ের সাথে $\varnothing$ এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করে এবং একে স্কেলার রাশি $\varnothing$ এর গ্রাডিয়েন্ট বলে।

এখানে উল্লেখ্য যে, $\nabla\varnothing$ একটি ভেক্টর রাশিকে বর্ণনা করে।

অর্থাৎ $\mathbf{A} = \nabla\varnothing =$ গ্রাড $\varnothing$ (১.১২)

১.৭ অপসারিতা (Divergence)

একটি গুরুত্বপূর্ণ কারক হলো অপসারিতা কারক যা মূলত একটি ডেরিভেটিভ। এটিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়,

$$\nabla.\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\ \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z}\right).(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

কোনো পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ আয়তন যখন শূন্যের কাছাকাছি যায় তখন একটি ভেক্টরের অপসারিতা হলো আয়তনে এর পৃষ্ঠ সংকলন (Surface Integral) এর সীমা। অর্থাৎ

$$\nabla.\mathbf{A} = \underset{\tau\to 0}{Lt}\ \frac{1}{\tau}\int \mathbf{A}\ .\ da \qquad (১.১৩)$$

যেখানে da ক্ষুদ্রতম পৃষ্ঠ এবং τ হলো আয়তন। অপসারিতা স্পষ্টই একটি স্কেলার ক্ষেত্র।

অপসারিতার মতবাদ হলো কোনো আয়তনের উপর একটি ভেক্টরের অপসারিতার সংকল উক্ত আয়তন বদ্ধকারী পৃষ্ঠের উপরের ভেক্টরের অভিলাম্বিক উপাংশের পৃষ্ঠ সংকলের সমান হবে। মনে করি বিবেচ্য আয়তনকে বহু সংখ্যক ক্ষুদ্র সেলে ভাগ করা হয়েছে। ধরা যাক i তম সেল এর আয়তন $\Delta\tau i$ এবং এটি Si পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ।

$$\sum_i \int_{si} \mathbf{A}.\mathbf{da} = \int_s \mathbf{A}\ .\ da \qquad (১.১৪)$$

যেখানে বাম দিকের প্রতিটি সংকলের অভিলাম্বিক বিবেচ্য আয়তন হতে বহির্মুখী হবে। যেহেতু একটি সেলের বহির্মুখ তার সংলগ্ন সেলের অন্তর্মুখ, ফলে উপরের সমীকরণের বাম দিকের সকল অবদান বাতিল হয়ে যাবে। শুধু ব্যতিক্রম হবে S পৃষ্ঠ হতে উৎপন্নগুলি। প্রতিসরতা মতবাদ পেতে হলে এখন সেল এর সংখ্যা এমনভাবে অসীম করতে হবে যাতে প্রতিটি সেল এর আয়তন শূন্য হয়,

$$\int_s \mathbf{A}.\mathbf{da} = \underset{\Delta\tau i\to 0}{Lt}\sum_i \left\{\frac{1}{\Delta\tau i}\int \mathbf{A}.\mathbf{da}\right\}\Delta\tau i \qquad (১.১৫)$$

সীমার মধ্যে i এর যোগফল হবে τ এর উপরের সংকল। si এর উপরের সংকল ও $\Delta\tau i$ এর অনুপাত হবে A এর প্রতিসরণ। সুতরাং

$$\int_s \mathbf{A}.\mathbf{da} = \int_\tau \nabla.\mathbf{A}\, d\tau \qquad (১.১৬)$$

এখানে **A**.da হলো প্রকৃতপক্ষে ক্ষুদ্রতম পৃষ্ঠ da এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত A ভেক্টরের ফ্লাক্স (flux) এবং da ভেক্টরটি এর পৃষ্ঠের উপরে অভিলাম্বিক। (১.১৬) সমীকরণটি হলো অপসারিতা মতবাদের গাণিতিক সূত্র।

এখানে উল্লেখ্য যে, (১.১৬) সমীকরণে বামপক্ষ কেবল S পৃষ্ঠে A এর মান জড়িত করেছে অপরদিকে ডানপক্ষ S পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ τ আয়তনের সর্বত্রব্যাপী A এর মান জড়িত করেছে। তড়িৎ চুম্বকের তাত্ত্বিক উৎকর্ষ সাধন ও সংকল নির্ণয়ের ব্যবহারিক উদ্দেশ্যে এই মতবাদ পরবর্তী অধ্যায়গুলিতে ব্যবহার করা হবে।

১.৮ রেখা সংকল (Line Integral)

একটি নির্দিষ্ট বক্ররেখার উপর a বিন্দু হতে b বিন্দু পর্যন্ত নির্ণীত সংকলকে রেখা সংকল বলে। যেমন

$$\int_a^b \mathbf{A}.dl \quad \text{বা} \quad \int_a^b \mathbf{A} \times d\mathbf{l}$$

এখানে প্রথমটিকে স্কেলার গুণনের নিয়ম অনুসারে বক্র রেখার উপরে dl দৈর্ঘ্যের প্রতিটি উপাদানকে **A** এর স্থানীয় মান দ্বারা গুণ করা হয়েছে। তারপর এ সমস্ত গুণফলকে যোগ করলেই সংকলের মান পাওয়া যাবে। একটি ভেক্টর ক্ষেত্র **A** কে সংরক্ষণশীল (Conservative) বলা হয় যদি একটি আবদ্ধ বক্ররেখার চতুর্দিকে $\mathbf{A}.dl$ এর রেখা সংকল শূন্য হয়,

$$\mathbf{A}.dl = 0 \tag{১.১৭}$$

১.৯ কার্ল (Curl)

একটি আবদ্ধ পৃষ্ঠের উপর অঙ্কিত বহির্মুখী অভিলাম্বিক এর সাথে কোনো ভেক্টর ক্রস গুণনের সংকল ও উক্ত পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ আয়তন (যখন আয়তন শূন্যের কাছাকাছি হয়) এর অনুপাতের সীমাকে ঐ ভেক্টরের কার্ল বলে।

বিভিন্ন স্থানাংক সিস্টেম এ কার্লের গঠন নির্ণয় করা যায়। আয়তক্ষেত্রের স্থানাংক সিস্টেমে $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ আয়তন সুবিধাজনক। কার্ল এর x উপাংশের জন্য কেবল y ও z অক্ষের উপর অভিলাম্বিক পৃষ্ঠ দুটি অবদান রাখে। $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$ ব্যবহার করে কার্ল এর x উপাংশ হবে

$$(\text{Curl } \mathbf{A})_x = \underset{\tau \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\tau} [\{-A_2(x,y,z+\Delta z) + A_2(x,y,z)\}\, \Delta x\, \Delta y + \{A_3(x,y+\Delta y,z) - A_3(x,y,z)\}\, \Delta x\, \Delta z] \tag{১.১৮}$$

এখন টেইলারের সিরিজ সম্প্রসারণ করে এবং সীমা নিয়ে কার্ল এর x উপাংশ হবে,

$$(\text{Curl } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_3}{\partial y} \quad \frac{\partial A_2}{\partial z}$$

কার্ল এর y ও z উপাংশ একইভাবে পাওয়া যাবে

$$(\text{Curl } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}.$$

$$(\text{Curl } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}$$

সুতরাং আয়তাকার ক্ষেত্র স্থানাংক সিস্টেমে কার্ল **A** কে ৩ × ৩ নির্ণায়ক (determinant) হিসেবে প্রকাশ করা যায়

$$\text{Curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \qquad (১.১৯)$$

এখন যদি আমরা ক্ষেত্রফলের উপাদানকে ভেক্টর **da** হিসেবে বিবেচনা করি যা রেখা সংকল এর জন্য পছন্দ করা দিকে ঘুরানো ডানহাতি স্ক্রু এর অগ্রসরের দিক নির্দেশ করে তখন

$$\oint \mathbf{A}.\mathbf{dl} = (\nabla \times \mathbf{A}).\mathbf{da} \qquad (১.২০)$$

যেখানে **dl** একটি পথের ক্ষুদ্রতম অংশ।

অর্থাৎ একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল **da** এর ধারের উপর দিয়ে **A. dl** এর রেখা সংকল কার্ল **A** এর স্কেলার গুণনের সমান হবে। (১.২০) সমীকরণ যে কোনো ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল **da** এর জন্য প্রযোজ্য হবে এবং

$$(\nabla \times \mathbf{A}) = Lt_{S \to 0} \frac{1}{S} \mathbf{A}.\mathbf{dl} \qquad (১.২১)$$

অর্থাৎ S পৃষ্ঠের সীমানার চতুর্দিকের ভেক্টরের রেখা সংকলকে পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল (যখন এই ক্ষেত্রফল শূন্যের কাছাকাছি হয়) দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল উক্ত S পৃষ্ঠের উপর অভিলাম্বিক একটি ভেক্টরের কার্ল এর উপাংশের সমান হবে।

১.১০ স্টোক এর মতবাদ (Stoke's Theorem)

স্টোক এর মতবাদ হলো, একটি আবদ্ধ বক্ররেখার চতুর্দিক দিয়ে একটি ভেক্টরের রেখা সংকল হবে ঐ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো পৃষ্ঠের উপর উক্ত ভেক্টরের কার্ল এর অভিলাম্বিক উপাংশের সংকলের সমান।

মনে করি S একটি পৃষ্ঠ এবং একে বহু সংখ্যক সেলে বিভক্ত করা হয়েছে। ধরা যাক S পৃষ্ঠের iতম সেল হলো ΔSi এবং যে বক্ররেখা একে আবদ্ধ করেছে তাহা হলো ci। যেহেতু এদের প্রতিটি সেল একই দিকে পরিভ্রমণ করে সেহেতু এটি স্পষ্ট যে ci এর চতুর্দিকের রেখা সংকলের সমষ্টি হবে ঠিক আবদ্ধকারী বক্ররেখার চতুর্দিকের রেখা সংকলের সমান ; কারণ অন্য অবদানগুলি বাতিল হয়ে যাবে। এরূপে সেল এর সংখ্যা যখন

$$\oint \mathbf{A}.\mathbf{dl} = \sum_i \oint_{ci} \mathbf{A}.\mathbf{dl} \qquad (১.২২)$$

এমনভাবে অসীম হতে থাকবে যাতে প্রত্যেক সেল এর আয়তন শূন্যের কাছাকাছি যাবে তখনই একমাত্র সীমা নেয়া বাকি থাকবে। এই সীমা পদ্ধতির ফলাফল হবে

$$\oint_c \mathbf{A}.\mathbf{dl} = Lt_{\Delta si \to o} \frac{1}{\Delta si} \oint_{ci} \mathbf{A}.\mathbf{dl}\, \Delta si$$

$$= \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \,.\, \mathbf{da} \qquad (১.২৩)$$

এটিই হলো স্টোক এর মতবাদ। এটিই রেখা সংকলের সাথে রেখা সংকল পথ দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো পৃষ্ঠের উপরের পৃষ্ঠ সংকল এর সম্পর্ক স্থাপন করে। এই মতবাদও তড়িৎ চুম্বকীয় মতবাদের উন্নতি সাধনে এবং সংকল নির্ণয়ে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

১.১১ ল্যাপলেসিয়ান (Laplacian)

তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্বে গ্রাডিয়েন্টের প্রতিসরতা খুব গুরুত্বপূর্ণ।

যেহেতু $\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}f + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}f + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

অতএব $\nabla . \nabla f = \nabla^2 f$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (১.২৪)$$

$\nabla . \nabla f$ সংখ্যাটির সংক্ষিপ্ত আকার $\nabla^2 f$, একে f এর ল্যাপলেসিয়ান বলে। ∇^2 কারককে ল্যাপলাসের কারক বলে।

১.১২ ব্যবকলনী কারক (∇) সংক্রান্ত ভেক্টর বিশ্লেষণের সূত্রাবলী (Formulas from Vector analysis involving differential operator, ∇)

যদি (x,y,z) অবস্থানে A ও B ব্যবকলনীযোগ্য ভেক্টর ফাংশন এবং ϕ ও ψ ব্যবকলনীযোগ্য স্কেলার ফাংশন হয় তাহলে নিম্নের সূত্রগুলি সিদ্ধ।

(১) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(২) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

(৩) $\nabla(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

(৪) $\nabla . (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) . \mathbf{A} + \phi(\nabla . \mathbf{A})$

(৫) $\nabla . (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} . (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} . (\nabla \times \mathbf{B})$

(৬) $\nabla . (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla . \mathbf{A} + \nabla . \mathbf{B}$

(৭) $\nabla . (\nabla . \mathbf{A}) = 0$

(৮) $\nabla . (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

(৯) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(১০) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B} + (\nabla.\mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla.\mathbf{A})\mathbf{B}$

(১১) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

(১২) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

(১৩) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

(১৪) $\int_\tau \nabla\phi d\tau = \int_s \phi\, d\mathbf{a}$

(১৫) $\int_\tau (\nabla \times \mathbf{A})\, d\tau = \int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{a}$ এখানে s হলো τ আয়তন বদ্ধকারী পৃষ্ঠ।

(১৬) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}$ যেখানে একই একক ভেক্টর ব্যবহার করে ক্ষেত্র ~~বিন্দুতে~~ গ্রাডিয়ান্ট নির্ণয় করা হয়।

সমাধানকৃত সমস্যাবলী
(Solved Problems)

সমস্যাবলী (Problems)

১। দুটি প্লেন, $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

এবং $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

একটি একক ভেক্টর (unit vector) নির্ণয় কর যা **A** ও **B** প্লেনের উপর লম্ব.

(Two given planes are $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, and $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. determine the unit vector which is perpendicular to both **A** & **B**) ।

সমাধান

মনে করি ভেক্টর $\mathbf{C} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, **A** ও **B** প্লেনের উপর লম্ব। তাহলে **C**, **A** ও **B** প্লেনের উপর লম্ব হবে।

যদি $\mathbf{C}.\mathbf{A} = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ হয়।

বা $3x_1 - 2x_2 = -4x_3$ (১)

আবার $\mathbf{C}.\mathbf{B} = 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

বা $6x_1 + x_2 = 2x_3$ (২)

এখন সমীকরণ (১) ও (২) সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2x_3$$

$$\therefore \quad \mathbf{C} = 2x_3\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = x_3(2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

তাহলে C এর দিকে একক ভেক্টর হবে

$$\frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{x_3(2\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{x_3^2[2^2 + 1^2]}}$$

$$= \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}\right)$$

২। যদি $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

এবং $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

সমাধান

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&\qquad + A_3\mathbf{k} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\
&\qquad + A_2B_2\mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_2B_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + A_3B_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} \\
&\qquad + A_3B_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\
&= 0 + A_1B_2\mathbf{k} - A_1B_3\mathbf{j} - A_2B_1\mathbf{k} + 0 + A_2B_3\mathbf{i} \\
&\qquad + A_3B_1\mathbf{j} - A_3B_2\mathbf{i} + 0 \\
&= (A_2B_3 - A_3B_2)\,\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\,\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\,\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(প্রমাণিত)}
\end{aligned}
$$

৩। প্রমাণ কর যে, $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$, যেখানে ϕ এবং ψ হলো স্কেলার ফাংশন।

সমাধান

$$
\begin{aligned}
\nabla(\phi\psi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(\phi\psi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi)\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)\,\mathbf{k} \\
&= \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= \phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \qquad \text{(প্রমাণিত)।}
\end{aligned}
$$

৪। যদি $\phi = 4x^4y^2z^3$ হয় তবে $\nabla.\nabla\phi$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(4x^4y^2z^3) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(4x^4y^2z^3) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(4x^4y^2z^3) \\
&= 16x^3y^2z^3\mathbf{i} + 8x^4yz^3\mathbf{j} + 12x^4y^2z^2\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

তাহলে

$$
\nabla.\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).(16x^3y^2z^3\mathbf{i} + 8x^4yz^3\mathbf{j} + 12x^4y^2z^2\mathbf{k})
$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(16x^3y^2z^3) + \frac{\partial}{\partial y}(8x^4yz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(12x^4y^2z^2)$$

$$= 48x^2y^2z^3 + 8x^4z^3 + 24x^4y^2z \quad [\because \mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1$$

এবং $\mathbf{i.j} = \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = 0$]

৫। প্রমাণ কর যে, $\nabla.(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi).\mathbf{A} + \phi(\nabla.\mathbf{A})$ যেখানে $\mathbf{A}$ একটি ভেক্টর।

সমাধান

মনে করি $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

$$\nabla.(\phi\mathbf{A}) = \nabla.(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right).(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$+ \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= (\nabla\phi).\mathbf{A} + \phi(\nabla.\mathbf{A}) \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

৬। প্রমাণ কর যে, যদি $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ হয় তবে, $\nabla.(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) = 0$।

সমাধান

ধরা যাক, $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

এবং $\mathbf{L} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

তাহলে $\mathbf{A} \times \mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$= (A_2z - A_3y)\,\mathbf{i} + (A_3x - A_1z)\,\mathbf{j} + (A_1y - A_2x)\,\mathbf{k}$$

এখন $\nabla.(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).[(A_2z - A_3y)\,\mathbf{i}$

$$+ (A_3x - A_1z)\,\mathbf{j} + (A_1y - A_2x)\,\mathbf{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_2z - A_3y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_3x - A_1z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_1y - A_2x)$$

$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y\frac{\partial A_3}{\partial x} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

$$= x\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}].\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k}\right)\right]$$

$$= \mathbf{L}.\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{L}.(\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{L}.O = 0 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

৭। যদি $\mathbf{A} = 6xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ হয় তবে $\int_S \mathbf{A}.d\mathbf{a}$ এর মান নির্ণয় কর। এখানে $\mathbf{a}$ হলো $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ঘনটির তল।

(Evaluate $\int_S \mathbf{A}.\,d\mathbf{a}$ where $\mathbf{A} = 6xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ and $\mathbf{a}$ is the surface of the cube bounded by $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$).

সমাধান

অপসারিতার মতবাদ (Divergence theorem) অনুসারে (সমীকরণ ১.১৬)

$$\int_S \mathbf{A}.\,d\mathbf{a} = \int_\tau \nabla.\mathbf{A}\,d\tau$$

$$= \int_\tau \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).(6xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k})\right] d\tau$$

$$= \int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}(6xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right] d\tau$$

$$= \int_\tau (6y + z - 2z)\,d\tau$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (6y - z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left[6yz - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(6y - \frac{1}{2}\right) dy\,dx = \int_0^1 \left[3y^2 - \frac{1}{2}y\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2}\right) dx = 5/2 \quad \text{Ans.}$$

৮। যদি $\mathbf{A} = (2x - y)\,\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\,\mathbf{k}$ হয়, তবে স্টোক এর মতবাদ প্রমাণ কর। এ ক্ষেত্রে S হলো $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের (sphere) উপরের তলের অর্ধাংশ এবং C এর সীমা (Boundary)

(Verify Stoke's theorem for $\mathbf{A} = (2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ where S is the Upper half surface of the sphere and C is its boundary)

সমাধান

তল S এর সীমা C হলো xy প্লেনে একটি বৃত্ত যার ব্যাসার্ধ একক এবং এর কেন্দ্র উৎস বিন্দুতে।

C এর সমীকরণে

ধরা যাক, $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0,\ 0 \le t \le 2\pi$

তাহলে $\oint_c \mathbf{A}.\,d\mathbf{l} = \oint_c [(2x - y)\,\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}]\,.\,d\mathbf{l}$

$$= \oint_c (2x - y)\,dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)\,(-\sin t)\,dt$$

$$= \pi$$

আবার, $\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial x & \partial/\partial x \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$

অতএব $\int_S (\nabla \times \mathbf{A})\,.\,d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{k}.\,d\mathbf{a} = \iint_R dx\,dy$

যেহেতু $\mathbf{k}.\,d\mathbf{a} = dx\,dy$ এবং R হলো xy প্লেনে S এর অভিক্ষেপণ (projection)।

$$\iint_R dx\,dy = \int_{x=-1}^{+1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$$

অতএব স্টোকস এর মতবাদ $\oint \mathbf{A}.\,d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}).\,d\mathbf{a}$ প্রমাণিত হলো।

প্রশ্নমালা

১ $\mathbf{A} = 3i + a\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ যদি একে অপরের উপর লম্ব হয় তবে a এর মান নির্ণয় কর।

(Find the Value of a if $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ are perpendicular to each other)

২। দুটি ভেক্টর $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর

(Determine the angle between the two Vectors $\mathbf{A} = 2i + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$)

৩। যদি $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = 2i + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ হয় তবে $\left|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})\right|$ এর মান নির্ণয় কর

(If $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 2i + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ then determine the magnitude of $\left|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})\right|$

৪। দেয়া আছে $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ । একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\mathbf{A}$ ও $\mathbf{B}$ এর প্লেনের উপর লম্ব।

(Given $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 3i + 5j - \mathbf{k}$, Determine the unit vector which is perpendicular to the plane of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$)

৫। প্রমাণ কর যে $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \,.\, (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \,.\, (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$

(Prove that $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).\, (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).\, (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}).\, (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$)

৬। যদি $\phi = \frac{1}{r}$ হয় তবে $\nabla\phi$ এর মান নির্ণয় কর।

(If $\phi = \frac{1}{r}$ determine the Value of $\nabla\phi$)

৭। প্রমাণ কর যে, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$

(Prove that $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$)

৮। যদি $\mathbf{A} = 3yz\mathbf{i} - y^2x\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ হয় তবে $(\mathbf{A} \times \nabla)\,\phi$ এর মান নির্ণয় কর।

(If $\mathbf{A} = 3yz\mathbf{i} - y^2x\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$, evaluate $(\mathbf{A} \times V)\,\phi$)

৯। যদি $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ হয় তবে $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ এর মান নির্ণয় কর।

(Determine the Value of $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ if $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$)

১০। দেয়া আছে $\mathbf{A} = 2yz^2\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + 3x^2y\mathbf{k}$ এবং

$$\mathbf{B} = xy^2z\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[Given $\mathbf{A} = 2yz^2\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + 3x^2y\mathbf{k}$ and

$\mathbf{B} = xy^2z\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$

Determine the value of $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$]

১১। যদি $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\omega = \frac{1}{2}\text{curl } \mathbf{v}$, এখানে ω একটি ধ্রুব ভেক্টর।

(If $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ then prove that $\omega = \frac{1}{2}\text{curl } \mathbf{v}$, here ω is a constant Vector)

১২। যদি $\nabla . \mathbf{A}$ যে কোনো বিন্দু x এ ভেক্টর ক্ষেত্র $\mathbf{A}$ এর প্রতিসরতা প্রকাশ করে তবে দেখাও যে, $\nabla . \mathbf{A} = \underset{\Delta v \to 0}{\text{Lt}} \int_{\Delta s} \frac{\mathbf{A}.\mathbf{ds}}{\Delta v}$

যেখানে Δv হলো তল Δs দ্বারা আবদ্ধ ঘনক্ষেত্র এবং x বিন্দুতে Δv সংকুচিত করে সীমা পাওয়া যায়।

(If $\nabla . \mathbf{A}$ denotes the divergence of a vector field $\mathbf{A}$ at a point X, show that $\nabla . \mathbf{A} = \underset{\Delta v \to 0}{\text{Lt}} \int_{\Delta s} \frac{\mathbf{A}.\text{ds}}{\Delta v}$

Where Δv is the volume enclosed by the surface Δs and the limit is obtained by shrinking Δv to the point X).

১৩। একটি তরল পদার্থ যার ঘনত্ব $\rho\,(x,y,z,t)$ এটি $\mathbf{v}\,(x,y,z,t)$ বেগে প্রবাহিত হয়। যদি অন্য কোনো উৎস না থাকে বা ডুবে না যায় তবে প্রমাণ কর যে,

$$\nabla . \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{যেখানে} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

(A fluid of density $\rho\,(x,y,z,t)$ moves with velocity $\mathbf{v}\,(x,y,z,t)$. If there are no sources or sinks,

Prove that $\nabla . \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ where $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$).

১৪। যদি $\oint_c \mathbf{E} . \mathbf{dr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}.\text{ds}$, তবে দেখাও যে, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$

যেখানে s হলো বক্ররেখা c দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো তল।

(If $\oint_c \mathbf{E} . \mathbf{dr} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{H}.\text{ds}$, where S is any surface bounded by the curve, C, Show that $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$)

দ্বিতীয় অধ্যায়

স্থির তড়িৎবিদ্যা

(Electrostatics)

২.০ সূচনা

যে সকল তড়িৎ ক্ষেত্র (Electric field) সময়ের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে সেগুলি আলোচনাই স্থির তড়িৎবিদ্যার লক্ষ্য। তড়িৎ মতবাদের উন্নতি নির্দিষ্ট স্বতঃসিদ্ধ বা পরীক্ষার ফলাফলের উপর নির্ভরশীল।

শুরুতেই আমরা আধান (charge) এর ভৌতিক ধারণা দিতে চেষ্টা করবো। কারণ এ আধানকে কেন্দ্র করেই স্থির তড়িৎবিদ্যার আলোচনা পরিধি বিস্তৃত। ক্রমান্বয়ে আমরা ভৌতিক পরীক্ষার (যেমন কুলম্ব-এর সূত্র) ফলাফল আলোচনা করবো।

২.১ তড়িৎ আধান (Electric Charge)

স্থির তড়িৎ আধান সম্বন্ধে প্রথমে মানুষের ধারণার সৃষ্টি হয় প্রাচীন গ্রীক সমাজে খ্রিষ্টপূর্ব ৬০০ অব্দে। কাঠের দণ্ডকে এক টুকরা লোমশচর্ম দ্বারা ঘর্ষণের ফলে যে তড়িৎ আধানের সৃষ্টি হয় সে ঘটনা আমাদের অতি পরিচিত। তবে উক্ত পরীক্ষায় প্রকৃতপক্ষে আধান কিন্তু নিজে সৃষ্টি হয় না; বস্তু দুটির মধ্যেকার মোট আধান তড়িতায়নের পূর্বাবস্থার মতো একই থাকে। আধুনিক পদার্থবিদ্যার মতে ক্ষুদ্রাকার আহিত (charged) কণিকা, বিশেষ করে ইলেকট্রন লোমশচর্ম থেকে কাঠে স্থানান্তরিত হয় এবং সেক্ষেত্রে কাঠকে ঋণাত্মক আধানে ও লোমশচর্মকে ধনাত্মক আধানে পরিণত করে। সে সব প্রাথমিক কণিকা দ্বারা পদার্থ তৈরি আধান তাদের মৌলিক ও বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম নির্ণয় করে। আধান দুই প্রকার — ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এবং এক টুকরা সাধারণ পদার্থে প্রায় সমপরিমাণ উভয় প্রকার আধান থাকে। কোনো বস্তু আহিত বলতে আমরা বুঝি যে এর মধ্যে অতিরিক্ত ইলেকট্রন (ঋণাত্মক) বা অতিরিক্ত প্রোটন (ধনাত্মক) আছে। একটি আবদ্ধ সিস্টেমে মোট আধান সংরক্ষিত থাকে; অর্থাৎ আধানকে ধ্বংস বা সৃষ্টি করা যায় না।

তড়িৎ চুম্বকীয় (Electromagnetic) তত্ত্বের সন্তোষজনক ব্যাখ্যার জন্য তড়িৎ আধানের আচরণ পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পরীক্ষা করা প্রয়োজন।

২.২ কুলম্ব এর সূত্র (Coulomb's Law)

অষ্টাদশ শতাব্দীর শেষের দিকে ব্যবহারিক বিজ্ঞানের কলাকৌশল এত উন্নতি লাভ করে যে তড়িৎ আধানসমূহের মধ্যকার ক্রিয়াশীল বল পর্যবেক্ষণ করা সম্ভব হয়। এসব পর্যবেক্ষণের ফলাফল নিম্নে সংক্ষিপ্ত আকারে দেয়া হলো।

(ক) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক নামে কেবল দুই প্রকার তড়িৎ আধান আছে।

(খ) দুটি বিন্দু আধান একে অপরের উপর যে বল প্রয়োগ করে তা এদের সংযুক্তকারী রেখা বরাবর থাকে এবং এদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক (Inversely proportional) হয়।

(গ) এ সমস্ত বল আধানসমূহের গুণফলের সমানুপাতিক ; সমধর্মী আধানের জন্য বিকর্ষণ এবং বিপরীতধর্মী আধানের জন্য আকর্ষণ

উল্লেখিত (ক) কে প্রস্তাবনা হিসেবে ধরলে (খ) ও (গ) কে কুলম্ব এর সূত্র বলা হয়।

q_1 ও q_2 দুটি বিন্দু আধানের জন্য ভেক্টর চিহ্ন ব্যবহার করে কুলম্ব এর সূত্র নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (২.১)$$

যেখানে $\mathbf{F}$ হলো q_1 ও q_2 বিন্দু আধান দুটির মধ্যেকার বল, r হলো এদের মধ্যেকার দূরত্ব, $\mathbf{r}_1$ হলো একক ভেক্টর যা q_1 থেকে q_2 এর দিক নির্ণয় করে (চিত্র ২.১) এবং ϵ_0 হলো মুক্ত স্থানের অনুমোদিতা (permitivity of free space), এর মান 8.845×10^{-12} কুলম্ব²/নিউটন মিটার।

চিত্র ২.১ : বিন্দু আধান q_1 ও q_2 এর মধ্যকার বল।

এক জোড়া বিন্দু আধানের ক্ষেত্রে এটি যেমন প্রযোজ্য তেমনি এটি ডাইইলেক্ট্রিক এবং পরিবাহীর জন্যও প্রযোজ্য। আধান দুটিকে যখন মুক্ত স্থানের পরিবর্তে অন্য কোনো পদার্থে রাখা হয় তখন এদের মধ্যেকার বলের পরিবর্তন ঘটে। সেক্ষেত্রে ϵ_0 কে বিবেচ্য পদার্থের অনুমোদিতা ϵ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয়।

মনে করি অনেকগুলি বিন্দু আধান q_i ($i = 1,2,3, \ldots\ldots$) আছে। এদের জন্য একটি বিন্দু আধান q_0 এর উপর ক্রিয়াশীল বল হবে,

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i \qquad (২.২)$$

এ সমীকরণের প্রকৃত অর্থ হলো আধান এবং এদের মধ্যেকার বল সংক্রান্ত যে পদার্থবিদ্যা তার অন্তর্নিহিত ধারণা সৃষ্টি করা। এখন আধান বণ্টন সম্বন্ধে কিছুটা ধারণা নেয়া যাক। সবচেয়ে সহজ ধরনের আধান বণ্টন হলো এমন একটি পৃথক বিন্দু আধান যা কোনো স্থানের এত ক্ষুদ্র অংশব্যাপী বিস্তৃত যে তার আয়তন বিবেচনা করার প্রয়োজন হয় না। যখন কোনো নির্দিষ্ট আয়তনের স্থান একগুচ্ছ আধান দ্বারা পরিবৃত থাকে তখন চার্জের ঘনত্ব বিবেচনা করা প্রয়োজন।

আয়তন আধান ঘনত্ব (Volume Charge Density) ρ কে লেখা যায়

$$\rho = \frac{dq}{dv} \quad \text{কুলম্ব/মিটার}^3 \qquad (২.৩)$$

এবং পৃষ্ঠ আধান ঘনত্ব (Surface Charge Density) ρ কে লেখা যায়

$$\rho = \frac{dq}{ds} \quad \text{কুলম্ব/মিটার}^2 \qquad (২.৪)$$

যেখানে S হলো পৃষ্ঠ এবং v হলো আয়তন।

বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে যেখানে কোনো স্থানে ঘনত্ব সুষমভাবে বিস্তৃত সেখানে লেখা যায়,

$$\rho = \frac{q}{v} \tag{২.৫}$$

২.৩ তড়িৎ ক্ষেত্র (Electric Field)

একটি আধানের উপরে বল কিছু দূরে অবস্থিত অন্য একটি আধানের উপস্থিতির কারণে অনুভূত হয়ে থাকে, এটি আমরা পূর্ব অনুচ্ছেদে জেনেছি। একটি আধানের চতুর্দিকে যতদূর পর্যন্ত এর আকর্ষী বা বিকর্ষী বল অনুভূত হয় ততদূর পর্যন্ত তড়িৎ বল ক্ষেত্র বিরাজমান থাকে। একটি নির্দিষ্ট আধানের উপরে ক্রিয়াশীল বলকে ঐ বিন্দুতে সৃষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র দ্বারা সংঘটিত হয় বলে মনে করা হয়। তড়িৎ ক্ষেত্র একটি ভেক্টর রাশি। এর কোনো বিন্দুতে একটি আধান রাখলে তার উপর যে পরিমাণ স্থির তড়িৎ বল অনুভূত হয় তাকে ঐ ক্ষেত্রের তীব্রতা (Field Intensity) বলে। তড়িৎ ক্ষেত্রকে $\mathbf{E}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে। এটি যে কোনো বিন্দুতে আধান q এর উপর ক্রিয়ারত বল $\mathbf{F}$ এর সাথে নিম্নের সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত,

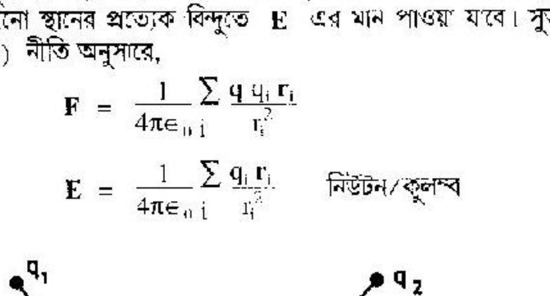
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \tag{২.৬}$$

এই ভেক্টর রাশির মানকে তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা বলা হয়। এস.আই (SI) পদ্ধতিতে এর একক হলো নিউটন/কুলম্ব। স্থির তড়িৎবিদ্যার ক্ষেত্রে (যেখানে সমস্ত আধান স্থির) কুলম্বের সূত্র প্রয়োগ করে কোনো স্থানের প্রত্যেক বিন্দুতে $\mathbf{E}$ এর মান পাওয়া যাবে। সুতরাং উপরিপাতন (superposition) নীতি অনুসারে,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q\, q_i\, \mathbf{r}_i}{r_i^2}$$

বা

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i\, \mathbf{r}_i}{r_i^2} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \tag{২.৭}$$



চিত্র ২.২ : q_1, q_2 ও q_3 আধান কর্তৃক a বিন্দুতে q এর উপরে বল নির্ণয়।

২.২ চিত্র দ্বারা অতি সহজভাবে বল ও ক্ষেত্র নির্ণয়ের মধ্যেকার পার্থক্য দেখানো হয়েছে। একটি আধান q এর উপরে নির্দিষ্ট আধান q_1, q_2 ও q_3 হতে উৎপাদিত বল ভেক্টর সমষ্টিকরণ দ্বারা নির্ণয় করা যায়,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q\, q_1\, \mathbf{r}_1}{r_1^2} + \frac{q\, q_2\, \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \frac{q\, q_3\, \mathbf{r}_3}{r_3^2}\right) \quad \text{নিউটন} \tag{২.৮}$$

পার্থক্যস্বরূপ q_1, q_2 ও q_3 দ্বারা উৎপাদিত a বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্র **E** হবে

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1\mathbf{r}_1}{r_1^2} + \frac{q_2\mathbf{r}_2}{r_2^2} + \frac{q_3\mathbf{r}_3}{r_3^2}\right) \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৯)$$

আমাদের হিসাব অনুসারে এখন বল নির্ণয় করা হয়েছে q এর উপরে নয় বরং a বিন্দুতে প্রতি একক আধানের উপর।

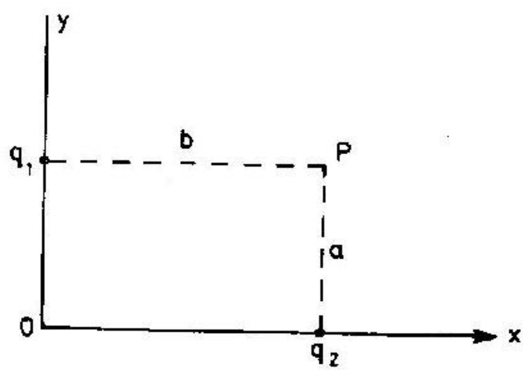
নিরবচ্ছিন্ন আধান বন্টনের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\mathbf{r} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.১০)$$

বল এর ক্ষেত্রে যেমন ব্যবহার করা হয়েছিল তেমনি এখানেও উপরিপাতন নীতি ব্যবহার করা হয়েছে। কোনো বিন্দুতে ক্ষেত্র হলো সংশ্লিষ্ট সকল আধানের ক্ষেত্র অবদানের ভেক্টর সমষ্টি।

২.৩.১ শ্রেণীবদ্ধভাবে সাজানো বিন্দু আধানের তড়িৎ ক্ষেত্র (Field of array of point charge)

মনে করি বিন্দু আধান q_1 ও q_2 উৎস বিন্দু 0 হতে যথাক্রমে a ও b দূরত্বে x ও y অক্ষের উপর অবস্থিত (চিত্র ২.৩)।



চিত্র ২.৩ : q_1 ও q_2 আধান কর্তৃক P বিন্দুতে ক্ষেত্র নির্ণয়।

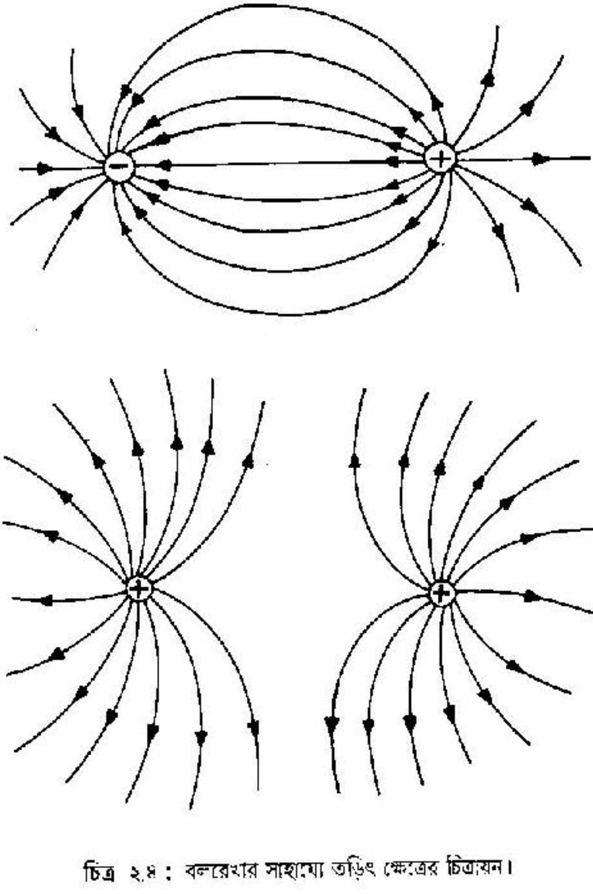
P বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান হবে (২.৯ সমীকরণ অনুসারে)।

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{a^2}\mathbf{r}_1 + \frac{q_2}{b^2}\mathbf{r}_2\right) \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.১১)$$

যেহেতু এ ক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর অভিলাম্বিক, সুতরাং P বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান হবে

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b^2}\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.১২)$$

২.৩.২ বলরেখা (Lines of Force) : কোনো একটি নির্দিষ্ট আধান বণ্টনের সাথে সংযুক্ত তড়িৎ ক্ষেত্রে গঠন প্রণালী বোধগম্য করার জন্য মাইকেল ফ্যারাডে বলরেখার ধারণা প্রবর্তন করেন। বলরেখা হলো একটি কাল্পনিক রেখা যা এমনভাবে অঙ্কিত হয় যে কোনো বিন্দুতে এর দিক ঐ বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্রের দিকে হয়। তড়িৎ ক্ষেত্রে এটি একটি ধনাত্মক আধান হতে শুরু হয় এবং ঋণাত্মক আধানে সমাপ্ত হয়। এরা আহিত বস্তুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করে না। একটি বলরেখার এক প্রান্ত ধনাত্মক ও অন্য প্রান্ত ঋণাত্মক। ২.৪ চিত্রে বলরেখা দ্বারা তড়িৎ ক্ষেত্রের চিত্রায়ণ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ২.৪ : বলরেখার সাহায্যে তড়িৎ ক্ষেত্রের চিত্রায়ন।

২.৪ তড়িৎ বিভব (Electric Potential)

ধরা যাক q একটি পরীক্ষামূলক বিন্দু আধান যকে একটি তড়িৎ ক্ষেত্র E তে চলাচল করানো যায়। একে একটি নির্দিষ্ট পথে ধ্রুবগতিতে a বিন্দু হতে b বিন্দুতে চালনা করতে যে কাজ করা হয় তা হলো

$$W = -\oint_a^b \mathbf{E}q.dl \qquad (২.১৩)$$

তড়িৎ ক্ষেত্রের বিরুদ্ধে কাজ করার জন্য ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে। যদি তড়িৎ ক্ষেত্র $\mathbf{E}$ একটি বিন্দু আধান q' দ্বারা তৈরি হয় তবে

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}_1.\mathrm{dl})}{r^2} \qquad (২.১৪)$$

বা

$$W = \frac{q\,q'}{4\pi\epsilon_0}\oint\frac{(\mathbf{r}_1.\mathrm{dl})}{r^2} \qquad (২.১৫)$$

ডানপাশে সংকল (integral) এর অধীনস্থ রাশির মান হবে $-d\left(\frac{1}{r}\right)$। যেহেতু r এর মান পথের শুরুতে এবং শেষে একই, সুতরাং আবদ্ধ পথব্যাপী $\left(\frac{1}{r}\right)$ এর বৃদ্ধির যোগফল শূন্য হবে। তাহলে রেখা সংকলের মান শূন্য হবে। ফলে নির্দিষ্ট বিন্দু আধান q' এর তড়িৎ ক্ষেত্রে আবদ্ধ পথে বিন্দু আধান q দ্বারা সমাপ্ত মোট কাজের মান শূন্য হবে। তড়িৎ ক্ষেত্র যদি একটি বিন্দু আধান দ্বারা সৃষ্টি না হয়ে কিছু সংখ্যক নির্দিষ্ট আধান বণ্টনের দ্বারা সৃষ্টি হয় তাহলে প্রতিটি স্বতন্ত্র আধান বিতরণের প্রতিষঙ্গিক রেখা সংকল শূন্য হবে। এভাবে নির্দিষ্ট আধানের যে কোনো বণ্টনের জন্য

$$\oint \mathbf{E}.\mathrm{dl} = 0 \qquad (২.১৬)$$

সুতরাং একটি স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র সংরক্ষণশীল (conservative) কুলম্ব বল যে কেন্দ্রীয় বল (central force) তা হতে এ গুরুত্বপূর্ণ ধর্মটি প্রতীয়মান হয়। এখন স্টোক এর মতবাদ (সমীকরণ ১.২৩) হতে কোনো স্থানের প্রতি বিন্দুতে

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (২.১৭)$$

এবং আমরা লিখতে পারি

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (২.১৮)$$

যেখানে V একটি স্কেলার বিন্দু ফাংশন, যেহেতু $\nabla \times \nabla V = 0$

অতএব আমরা তড়িৎ ক্ষেত্রকে সম্পূর্ণরূপে ফাংশন $V(x, y, z)$ দ্বারা বর্ণনা করতে পারি। এখানে $V(x, y, z)$ কে তড়িৎ বিভব বলা হয়। (২.১৮) সমীকরণে $-Ve$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে কারণ তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ বিভবের কমতি নির্দেশ করে। সমীকরণ (২.১৮) অনুসারে

$$\mathbf{E}.\mathrm{dl} = -\nabla V.\mathrm{dl} = -dV \qquad (২.১৯)$$

এখন

$$\int_1^2 \mathbf{E}.\mathrm{dl} = -(V_2 - V_1)$$

বা

$$\int_2^1 \mathbf{E}.\mathrm{dl} = V_2 - V_1 \qquad (২.২০)$$

এখানে উল্লেখ্য যে তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ কেবল দুটি বিন্দু বিভবের পার্থক্য নির্ণয় করে। অনন্ত দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুর বিভবকে সাধারণত শূন্য ধরা হয়। তাহলে বিন্দু 2 তে বিভব হবে

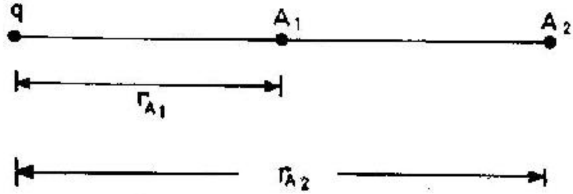
$$V = \int_2^{\infty} \mathbf{E}.\mathrm{dl} \qquad (২.২১)$$

যখন কোনো একক বিন্দু আধান q দ্বারা ক্ষেত্র সৃষ্টি হয় তখন

$$V = \int_{r}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (২.২২)$$

২.৪.১ একটি বিন্দু আধান q এর এলাকায় দুটি বিন্দুর মধ্যে বিভব পার্থক্য (Potential difference between two points in the region of a point charge q) : ধরা যাক q একটি বিন্দু আধান এবং A_1 ও A_2 এর এলাকায় দুটি বিন্দু (চিত্র ২.৫)।



চিত্র ২.৫ : বিন্দু আধান q এর জন্য A_1 ও A_2 এর মধ্যেকার তড়িৎ বিভব $V_{A_1A_2}$ নির্ণয়।

এখন আধান q দ্বারা সৃষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্রের বিরুদ্ধে একটি বিন্দু আধান q′ কে A_1 হতে A_2 পর্যন্ত সরাতে কাজ করতে হবে

$$W_{A_1A_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{A_2}} - \frac{1}{r_{A_1}}\right) \quad \text{জুলস} \qquad (২.২৩)$$

আবার যেহেতু $$V_{A_1A_2} = \frac{W_{A_1A_2}}{q'} \qquad (২.২৪)$$

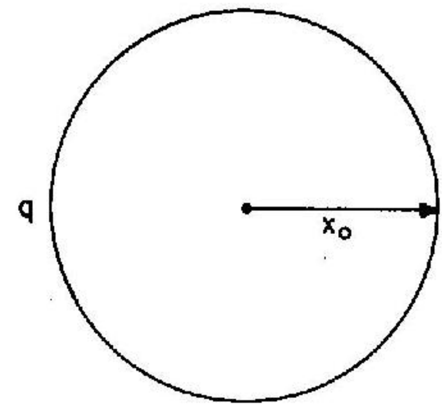
অতএব আমরা পাই $$V_{A_1A_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{A_2}} - \frac{1}{r_{A_1}}\right) \quad \text{জুলস/কুলম্ব} \qquad (২.২৫)$$

২.৪.২ একটি আহিত ধাতু গোলকের বিভব (Potential of a carged metal sphere) : ধরা যাক একটি ধাতু গোলকের ব্যাসার্ধ x_0 এবং এতে মোট আধানের পরিমাণ q (চিত্র ২.৬)।

যেহেতু একটি ধাতুর ভিতরের গড় স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র শূন্য, সুতরাং আধান অবশ্যই পৃষ্ঠদেশে অবস্থান করে। আবার আমরা জানি গোলাকার আধান বণ্টনের বাইরের তড়িৎ ক্ষেত্র একই হবে যেন সমস্ত আধান গোলকের কেন্দ্রবিন্দুতে অবস্থিত আছে। কাজেই বিভব নির্ণয় করতে আমরা বিন্দু আধানের তড়িৎ ক্ষেত্রের রাশি ব্যবহার করতে পারি,

$$V_x = -\int_{\infty}^{x_0} \mathbf{E}.d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{x_0} \frac{q}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_0} \qquad (২.২৬)$$



চিত্র ২.৬ : x_0 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ধাতু গোলকের পৃষ্ঠে মোট আধান q ।

যেখানে অনন্ত দূরত্বে বিভবের মান শূন্য ধরা হয়েছে।

২.৫ বিভব ক্ষেত্র সম্পর্ক (Potential Field Relationship)

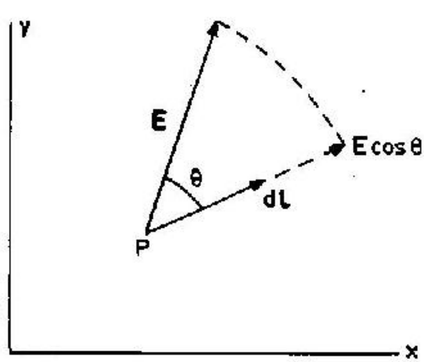
আমরা জানি যে, দুটি বিন্দুর মধ্যেকার বিভব পার্থক্য ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যেকার তড়িৎ ক্ষেত্রের রেখা সংকল এর সাথে সম্পর্কিত।

অর্থাৎ $$dv = -\mathbf{E}.dl$$

$$= -E\cos\theta\, dl \qquad (২.২৭)$$

বা $$\frac{dv}{dl} = -E\cos\theta \qquad (২.২৮)$$

এখানে $E\cos\theta$ তড়িৎ ক্ষেত্র **E** এর উপাংশ এবং সরণ dl এর সমান্তরাল (চিত্র ২.৭)।



চিত্র ২.৭ : P বিন্দুতে $E\cos\theta$ হলো dl বরাবর **E** এর উপাংশ।

(২.২৮) সমীকরণে – ve চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে, কারণ প্রতি একক আধান দ্বারা কাজ অবশ্যই E এর বলের বিরুদ্ধে ঘটে।

$\frac{dv}{dl}$ এর মান সরণের দিকের উপর নির্ভরশীল। এর সর্বোচ্চ মান হবে তড়িৎ ক্ষেত্রের দিক বরাবর (যেহেতু $\theta = 0$) এবং এর মান শূন্য হবে তড়িৎ ক্ষেত্রের উপর অভিলাম্বিক (orthogonal) যে কোনো ($\theta = 90^\circ$) দিকে।

যেহেতু **E** এর উপাংশকে x,y,z অক্ষ বরাবর প্রকাশ করা যায়, কাজেই অতি সহজে বিভব বৃদ্ধিহার (derivative) এর প্রেক্ষিতে **E** কে প্রকাশ করতে পারি।

অর্থাৎ $$\mathbf{E} = \mathbf{i}\,E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z \qquad (২.২৯)$$

যেখানে **i, j, k** যথাক্রমে x, y, z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। অতএব **E** এর প্রতিটি উপাংশকে লেখা যায়,

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

বা $$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (২.৩০)$$

এভাবে তড়িৎ ক্ষেত্র **E** স্কেলার সংখ্যা V এর স্থান বৃদ্ধিহারের সাথে সম্পর্কিত। এ রাশিকে বিভবের গ্রাডিয়েন্ট বলা হয় এবং সাধারণত এভাবে লেখা হয় :

$$\text{grad } V = -\left(\mathbf{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

অর্থাৎ $$\mathbf{E} = -\text{grad } V \qquad (২.৩১)$$

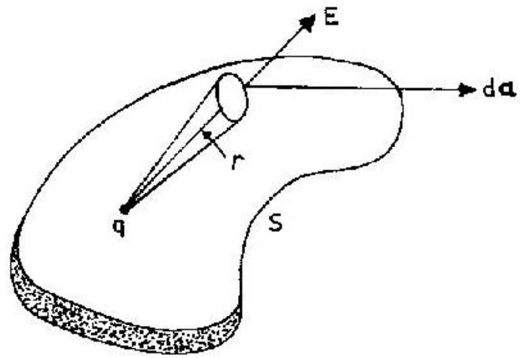
এটিই হলো বিভব ক্ষেত্র সম্পর্ক।

২.৬ গাউসের সূত্র (Gauss Law)

একটি সংবৃত পৃষ্ঠ (closed surface) ব্যাপী তড়িৎ ক্ষেত্রের (বা ফ্লাক্স **E** এর) অভিলাম্বিক উপাংশের সংকল এবং ঐ পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ মোট আধানের মধ্যে একটি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক বিরাজমান। এ সম্পর্কই গাউসের সূত্র হিসেবে পরিচিত যা এখানে বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

ধরা যাক, একটি কল্পিত সংবৃত পৃষ্ঠ S এর কেন্দ্রে একটি আধান q অবস্থিত। কেন্দ্র হতে r দূরত্বে একটি বিন্দুতে q দ্বারা সৃষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র (বা ফ্লাক্স **E**) হবে

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (২.৩২)$$



চিত্র ২.৮ : একটি কল্পিত সংবৃত পৃষ্ঠ S যার ভিতরে q একটি বিন্দু আধান।

সংবৃত S পৃষ্ঠের (যা কেন্দ্রে অবস্থিত q আধানকেও আবদ্ধ করে) তড়িৎ ক্ষেত্রের অভিলাম্বিক উপাংশের পৃষ্ঠ সংকল হবে

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\mathbf{r}_1}{r^2} \cdot d\mathbf{a} \qquad (২.৩৩)$$

যেখানে $d\mathbf{a}$ হলো S পৃষ্ঠের একটি ক্ষুদ্র আয়তন এবং $\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{a}$ হলো $\mathbf{r}_1$ এর উপরে অভিলাম্বিক তলে $d\mathbf{a}$ এর অভিক্ষেপ। তাহলে

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \qquad (২.৩৪)$$

যেখানে $d\Omega$ হলো $d\mathbf{a}$ দ্বারা কেন্দ্রবিন্দুতে উৎপন্ন ঘন কোণ (solid angle)। মোট ফ্লাক্স $\mathbf{E}$ পেতে হলে আমরা সমস্ত পৃষ্ঠ S ব্যাপী সংকল নেব। অর্থাৎ

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi \qquad \left[\because \int d\Omega = 4\pi\right]$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (২.৩৫)$$

যদি বিন্দু আধান q পৃষ্ঠ S এর বাইরে কোনো বিন্দুতে অবস্থিত হয় তবে ঐ বিন্দুতে পৃষ্ঠ দ্বারা উৎপন্ন ঘন কোণের মান শূন্য হবে। অপরদিকে পৃষ্ঠের অভ্যন্তরে যে কোনো বিন্দুতে উৎপন্ন ঘন কোনের মান 4π হবে।

যদি একাধিক বিন্দু আধান S পৃষ্ঠের অভ্যন্তরে অবস্থান করে, তবে ফ্লাক্সসমূহ বীজগাণিতিক নিয়মে যোগ হবে এবং উক্ত আয়তন ত্যাগকারী মোট ফ্লাক্সের পরিমাণ হবে q/ϵ_0। এটিই গাউসের সূত্র।

যদি S পৃষ্ঠ দ্বারা সংবৃত আধান একটি নির্দিষ্ট আয়তনব্যাপী বিস্তৃত থাকে তবে মোট সংবৃত আধান হবে

$$q = \int_{\tau} \rho d\tau \qquad (২.৩৬)$$

যেখানে ρ হলো আধান ঘনত্ব এবং τ হলো S পৃষ্ঠ দ্বারা সংবৃত আয়তন। তাহলে আমরা লিখতে পারি

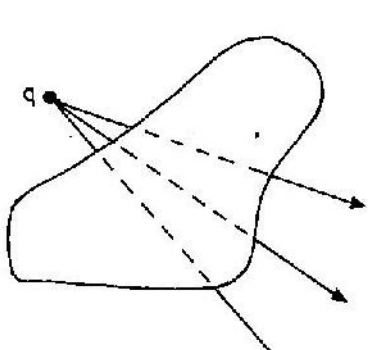
$$\int_{S} \mathbf{E}.\mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau \qquad (২.৩৭)$$

এটি সংকলীয় আকারে বর্ণিত গাউসের সূত্র (Gauss Law in Integral Form)।

গাউসের মতবাদের ভৌতিক ধারণা তড়িৎ রেখার অনুরূপ। ধরা যাক একটি সংবৃত পৃষ্ঠ এর ভিতরে কোনো আধান নেই কিন্তু এর বাইরে আধান আছে। এ ক্ষেত্রে বিবেচনাধীন আয়তনে আধান ঘনত্ব ρ শূন্য হবে। অতএব গাউসের সূত্র অনুযায়ী

$$\int_{S} \mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \qquad (২.৩৮)$$

সুতরাং আধানবিহীন অঞ্চলে স্থির তড়িৎ ক্ষেত্রে এরূপ অঞ্চল থেকে বহির্গামী মোট ফ্লাক্স এর মান শূন্য হবে। তড়িৎ রেখার ধারণা মতে আধানবিহীন অঞ্চলে তড়িৎ রেখা হবে অবিচ্ছিন্ন (চিত্র ২.৯)।



চিত্র ২.৯ : q আধানের জন্য একটি আয়তন হতে বহির্গামী মোট রেখার সংখ্যা আয়তনের বাইরে শূন্য হবে।

গাউসের সূত্রকে আরেকটি আকারে প্রকাশ করা যায় — একে বলা হয় ব্যবকলনী আকার (differential form)। অপসারিতার মতবাদ প্রয়োগ করে সংকেল আকার (integral form) হতে ব্যবকলনী আকার পাওয়া যায়। সমীকরণ (২.৩৭) এর বামপক্ষে অপসারিতার মতবাদ প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\int_{\tau} \nabla.\mathbf{E}\, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau \qquad (২.৩৯)$$

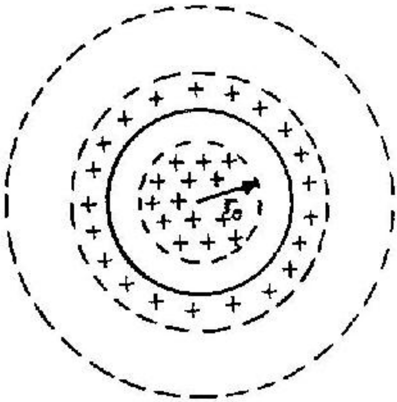
যেহেতু এ সমীকরণটি তড়িৎ ক্ষেত্রের মধ্যে যে কোনো সংবৃত পৃষ্ঠের জন্য সিদ্ধ, অতএব ক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দুতে সংকল দুটি সমান হবে,

$$\nabla . \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{২.৪০}$$

এটি ব্যবকলনী আকারে বর্ণিত গাউসের সূত্র (Gauss Law in Differential Form)।

২.৬.১ গাউসের সূত্রের প্রয়োগ (Application of Gauss Law) : **(ক) একটি সুষম গোলকাকার খোলক আধানের ক্ষেত্র** (Field of An Uniform Spherical Shell of Charge).

মনে করি r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সরু গোলকাকার খোলকে আধান ঘনত্ব ρ কুলম্ব/মিটার²। তাহলে খোলকে মোট আধানের পরিমাণ $\rho\pi r^2$ এখন আমরা গাউসের সূত্রের সাহায্যে খোলকের ভেতরে ও বাইরে এ আধান বন্টনের ক্ষেত্র নির্ণয় করবো।



চিত্র ২.১০ : আধান কর্তৃক সৃষ্ট ক্ষেত্র পরীক্ষা করার জন্য একটি গোলকাকার খোলকের চারদিকে বিভিন্ন গাউসীয় পৃষ্ঠ (ডট দ্বারা চিহ্নিত রেখা) স্থাপন করা হয়েছে।

গাউসের সূত্র ব্যবহার করতে হলে আমাদেরকে অবশ্যই ফ্লাক্স হতে তড়িৎ ক্ষেত্র বের করতে হবে। এটি সম্ভব হবে তখনই যখন একটি পৃষ্ঠ এমনভাবে অংকন করা হবে যাতে পৃষ্ঠ অভিলাম্বিক da এর প্রেক্ষিতে E এর দিক সর্বত্রই এক এবং যার ফলে গোটা পৃষ্ঠব্যাপী E এর একটি ধ্রুব মান থাকে

(অ) গোলাকাকার খোলক আধানের বাইরে ক্ষেত্র (Field outside a spherical shell charge) : গাউসীয় পৃষ্ঠের প্রতিসাম্য বিবেচনায় E এর মান পৃষ্ঠের সর্বত্র একই হবে এবং পৃষ্ঠের প্রত্যেক বিন্দুতে অভিলাম্বিকের সাথে সমান্তরাল। গাউসের সূত্র অনুসারে, গাউসীয় পৃষ্ঠের মধ্যেকার মোট ফ্লাক্স হবে

$$\int_S \mathbf{E}.\mathrm{da} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{২.৪১}$$

প্রতিসাম্যের খাতিরে ফ্লাক্সকে লেখা যায়,

$$\mathbf{E}\int da = \mathbf{E}.4\pi r_0^2$$

অতএব (২.৪১) সমীকরণের সাথে তুলনা করে আমরা পাই,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{q}{4\pi r_0^2} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৪২)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে খোলকের পৃষ্ঠে খোলক দ্বারা বর্ণিত তড়িৎ ক্ষেত্র ঠিক একই হবে যেন আধান q খোলক দ্বারা বর্ণিত গোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত।

(আ) গোলকাকার খোলক আধানের অভ্যন্তরে তড়িৎ ক্ষেত্র (Field inside a spherical shell charge) : এক্ষেত্রে আমরা খোলক আধানের ব্যাসার্ধ r এর চেয়ে কম যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি গোলকাকার গাউসীয় পৃষ্ঠ অংকন করবো যাতে বিবেচনাধীন আয়তনের মধ্যে কোনো আধান না থাকে। সুতরাং গাউসের ফ্লাক্স মতবাদ অনুসারে

$$\int_S \mathbf{E}.d\mathbf{a} = 0$$

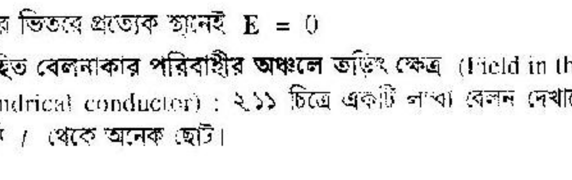
কিন্তু আবার প্রতিসাম্য অনুসারে, $\mathbf{E}$ এর যে কোনো মানই থাকুক না কেন পৃষ্ঠের প্রত্যেক জায়গাতেই এর মান সমান এবং এটি আদৌ যদি বিদ্যমান থাকে তবে প্রতিসাম্য অনুসারে পৃষ্ঠের অভিলাম্বিক হবে। এরূপে ফ্লাক্স গুণাঙ্ক হবে,

$$\int_S \mathbf{E}.d\mathbf{a} = \mathbf{E}.4\pi r_0^2 = 0 \qquad (২.৪৩)$$

কিন্তু যেহেতু $r \neq 0$

অতএব r_0 এর ভিতরে প্রত্যেক স্থানেই $\mathbf{E} = 0$

(খ) আহিত বেলনাকার পরিবাহীর অঞ্চলে তড়িৎ ক্ষেত্র (Field in the region of a charged cylindrical conductor) : ২.১১ চিত্রে একটি লম্বা বেলন দেখানো হয়েছে, যার ব্যাসার্ধ r দৈর্ঘ্য l থেকে অনেক ছোট।



চিত্র ২.১১ : একটি আহিত বেলনাকার পরিবাহী যার পৃষ্ঠ আধান ঘনত্ব σ কুলম্ব/মিটার^2 এবং এটি ক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য গাউসীয় পৃষ্ঠ দ্বারা বেষ্টিত।

প্রান্ত প্রভাব (End effect) এড়াতে আমরা গাউসীয় পৃষ্ঠের জন্য (খোলক আধানের ব্যাসার্ধের সমান r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট) এমন একটি বেলন লই যার ব্যাসার্ধ r খোলক আধানের ব্যাসার্ধের সমান কিন্তু দৈর্ঘ্য l_1 ছোট ($l_1 < l$)। আমাদের ফলাফল তাহলে প্রান্তদেশ ব্যতীত সমস্ত আহিত বেলনের জন্য প্রযোজ্য হবে। বেলনাকার প্রতিসাম্য থেকে আমরা জানি

যে খোলকের অরীয় পৃষ্ঠে (radical surface) তড়িৎ ক্ষেত্র সুষমরূপে অরীয়ভাবে বহির্মুখী হয় এবং বক্রপৃষ্ঠের সব বিন্দুতে (অক্ষ হতে r দূরত্বে) এর মান একই থাকে।

যেহেতু $\mathbf{E}$ এর রেখাগুলি গাউসীয় বেলনের ফ্লাট প্রান্তের সমান্তরাল, সেহেতু প্রান্তদেশ হতে উৎপন্ন $\mathbf{E}$ এর ফ্লাক্স শূন্য হবে। আমরা এখন গাউসের সূত্র দ্বারা বক্র পৃষ্ঠে মোট ফ্লাক্স নির্ণয় করবো। গাউসীয় পৃষ্ঠের অভ্যন্তরে মোট আধানের পরিমাণ

$$2\pi r l_1 \sigma$$

এখানে σ হলো খোলকের পৃষ্ঠ ঘনত্ব

গাউসের সূত্র অনুসারে, $$\int_S \mathbf{E}.d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi r l_1 \sigma$$

আবার $$\int_S da = 2\pi r l_1$$

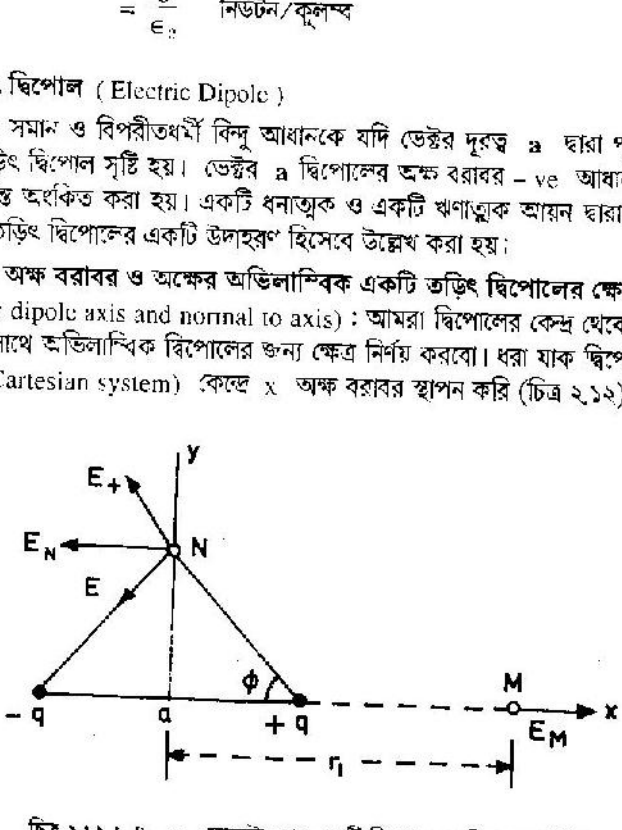
অতএব $$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2\pi r l_1 \sigma}{2\pi r l_1}$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৪৪)$$

২.৭ তড়িৎ দ্বিপোল (Electric Dipole)

এক জোড়া সমান ও বিপরীতধর্মী বিন্দু আধানকে যদি ভেক্টর দূরত্ব $\mathbf{a}$ দ্বারা পৃথক করা হয় তাহলে তড়িৎ দ্বিপোল সৃষ্টি হয়। ভেক্টর $\mathbf{a}$ দ্বিপোলের অক্ষ বরাবর – ve আধান হতে + ve আধান পর্যন্ত অংকিত করা হয়। একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক আয়ন দ্বারা গঠিত অণুকে প্রকৃতিতে তড়িৎ দ্বিপোলের একটি উদাহরণ হিসেবে উল্লেখ করা হয়।

২.৭.১ অক্ষ বরাবর ও অক্ষের অভিলাম্বিক একটি তড়িৎ দ্বিপোলের ক্ষেত্র (Field of an electric dipole axis and normal to axis) : আমরা দ্বিপোলের কেন্দ্র থেকে অক্ষ বরাবর ও অক্ষের সাথে অভিলাম্বিক দ্বিপোলের জন্য ক্ষেত্র নির্ণয় করবো। ধরা যাক দ্বিপোল কার্তেসীয় পদ্ধতির (Cartesian system) কেন্দ্রে x অক্ষ বরাবর স্থাপন করি (চিত্র ২.১২)।



চিত্র ২.১২ : $P = qa$ মোমেন্টসম্পন্ন একটি দ্বিপোলের তড়িৎ ক্ষেত্র নির্ণয়।

প্রতিসাম্য মোতাবেক y এবং z অক্ষ বরাবর ফলাফল একই রকম হবে ; সুতরাং আমাদের আলোচনা x ও y অক্ষের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখবো। দ্বিপোলের কেন্দ্র থেকে r_1 দূরত্বে M বিন্দুতে ক্ষেত্র হবে

$$E_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(r_1-a/2)^2} - \frac{q}{(r_1+a/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2r_1 a}{(r_1^2-a^2/4)^2} \qquad (২.৪৫)$$

N বিন্দুতে $+q$ এবং $-q$ এর জন্য তড়িৎ ক্ষেত্রকে যথাক্রমে E_+ এবং E_- দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। এদের y উপাংশদ্বয় বাতিল হয়ে যাবে। কিন্তু x উপাংশদ্বয় যোগ হয়ে লব্ধ ক্ষেত্র E_N তৈরি করবে। অতএব,

$$E_N = \left|E_+\right|\cos\phi + \left|E_-\right|\cos\phi \qquad (২.৪৬)$$

বা

$$E_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_2^2+(a/2)^2} + \frac{q}{r_2^2+(a/2)^2}\right]\frac{a/2}{\left[r_2^2+(a/2)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a}{\left[r_2^2+(a/2)^2\right]^{3/2}} \qquad (২.৪৭)$$

উপরিউক্ত জটিল রাশিকে সহজতর করা যায় যদি বিবেচনাধীন বিন্দুদ্বয় দ্বিপোল থেকে বহু দূরে অবস্থিত হয় এবং দ্বিপোলের আয়তন a এর তুলনায় অনেক বড় হয়। এই সীমার মধ্যে যখন $r^2 >> a^2/4$ তখন $a^2/4$ পদটি হর (denominator) থেকে বাদ দেয়া যায়। সেক্ষেত্রে সহজতর রাশিমালা হবে

$$E_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{2P}{r_1^3} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৪৮)$$

$$E_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{P}{r_2^3} \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৪৯)$$

যেখানে $P = qa$ দ্বিপোলের মোমেন্ট।

পরমাণবিক, আণবিক এবং কঠিন অবস্থার পদার্থবিদ্যার অনেক ক্ষেত্রে আমরা পারমাণবিক আয়তনের তুলনায় বহুগুণ দূরত্বে অবস্থিত দ্বিপোলের ক্ষেত্র নির্ণয়ে আগ্রহী। এসব ক্ষেত্রে উপরিউক্ত সন্নিকর্ষগুলি (approximation) সিদ্ধ হবে।

তড়িৎ দ্বিপোলের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হলো একটি সুষম তড়িৎ ক্ষেত্র দ্বারা এর উপরে প্রদত্ত ব্যাবর্তন বল (torque)।

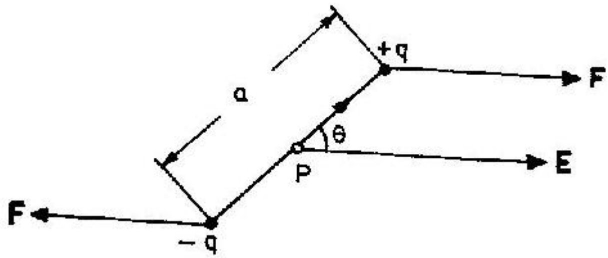
চিত্র ২.১৩ তে একটি ধ্রুব ক্ষেত্র E তে একটি দ্বিপোল দেখানো হয়েছে। স্পষ্টতই ব্যাবর্তন বল T এর মান হবে

$$T = qa\,E\sin\theta \quad \text{নিউটন/কুলম্ব} \qquad (২.৫০)$$

যেখানে θ হলো দ্বিপোল অক্ষ এবং ক্ষেত্রের ভিতরের কোণ।

আবার qa কে p দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয়েছে।

অতএব $T = PE\sin\theta$ নিউটন–মিটার (২.৫১)



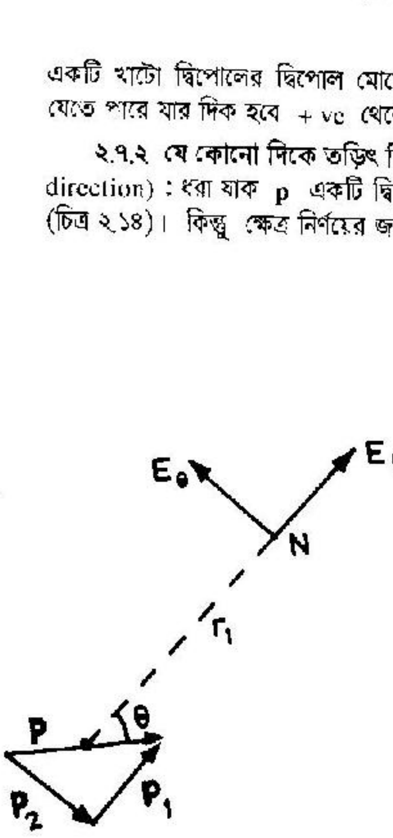
চিত্র ২.১৩ : একটি সুষম তড়িৎ ক্ষেত্রে একটি তড়িৎ দ্বিপোলের ব্যবর্তন বল।

একটি খাটো দ্বিপোলের দ্বিপোল মোমেন্টকে ভেক্টর রাশি **p** = q**a** হিসেবে ব্যবহার করা যেতে পারে যার দিক হবে + ve থেকে − ve আধানের দিকে।

২.৭.২ যে কোনো দিকে তড়িৎ দ্বিপোলের ক্ষেত্র (Field of an electric dipole in any direction) : ধরা যাক **p** একটি দ্বিপোল এবং এর N বিন্দুতে আমরা ক্ষেত্র নির্ণয় করবো (চিত্র ২.১৪)। কিন্তু ক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য এ যাবৎ আমরা যে পদ্ধতি ব্যবহার করেছি তা কেবল দ্বিপোলের অভিলাম্বিক ও সমান্তরাল দিকের জন্যই প্রযোজ্য তবে মূল দ্বিপোল **p** এর স্থলে **p** ও $\mathbf{p}_2$ দুটিকে অভিলাম্বিক ভেক্টরকে প্রতিস্থাপন করে এ অসুবিধা দূর করা যায়। এক্ষেত্রে আমরা দ্বিপোল মোমেন্টের ভেক্টর ধর্ম ব্যবহার করবো।

ভেক্টর দুটিকে এমনভাবে নেয়া হয়েছে যেন N বিন্দুতে r রেখার সাথে একটি সমান্তরাল ও অন্যটি অভিলাম্বিক হয়।

এখন সমীকরণ (২.৪৮) ও (২.৪৯) ব্যবহার করে সরাসরি এই দ্বিপোল উপাংশের প্রেক্ষিতে N বিন্দুতে r এর সমান্তরাল ও অভিলাম্বিক ক্ষেত্র উপাংশ যথাক্রমে E_r ও E_θ নির্ণয় করা যায়। তাহলে আমরা পাই,



চিত্র ২.১৪ : N বিন্দুতে দ্বিপোল p এর ক্ষেত্র উপাংশ।

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3} \qquad (২.৫২)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_2}{r^3} \qquad (২.৫৩)$$

কিন্তু $p_1 = p\cos\theta$ এবং $p_2 = p\sin\theta$ প্রতিস্থাপন করে ক্ষেত্র উপাংশ দুটি দাঁড়ায়,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad (২.৫৪)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad (২.৫৫)$$

এভাবে আমরা r দূরত্বে যে কোনো দিকে (যা Q কোণ দ্বারা মাপা যায়) দ্বিপোলের ক্ষেত্র নির্ণয়ের সমীকরণ লাভ করেছি।

২.৮ পয়সনের সমীকরণ (Poisson's Equation)

গাউসের সূত্র (২.৪০) থেকে আমরা পাই

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (২.৫৬)$$

আবার একটি খাঁটি স্থির তড়িৎ ক্ষেত্রে $\mathbf{E}$ কে বিভব V এর প্রেক্ষিতে লেখা যায়,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (২.৫৭)$$

(২.৫৬) ও (২.৫৭) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\nabla.\nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (২.৫৮)$$

সুবিধার জন্য $\nabla.\nabla$ কে একটি একক কারক (operator) ∇^2 হিসেবে ধরা যায়। তাহলে (২.৫৮) কে লিখতে পারি

$$\nabla^2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (২.৫৯)$$

এটিই হলো পয়সনের সমীকরণ। ∇^2 কারককে ল্যাপলাসিয়ান কারক বলা হয়। এটি একটি খাঁটি স্কেলার ব্যবকলনী কারক এবং (২.৫৯) সমীকরণ একটি ব্যবকলিত সমীকরণ. ∇^2 কারকটি একাধিক পরিবর্তীর (variable) প্রেক্ষিতে ব্যবকলন। অতএব পয়সনের সমীকরণ হলো আংশিক ব্যবকলিত সমীকরণ এবং একে সমাধান করা যাবে যদি আমরা $\rho\,(x, y, z)$ এর অপেক্ষী নির্ভরশীলতা এবং উপযোগী সীমান্ত শর্ত জানতে পারি।

২.৯ ল্যাপলাসের সমীকরণ (Laplace's Equation)

পরিবাহীর কোনো নির্দিষ্ট শ্রেণীর স্থির তাড়িত সমস্যায় আধানগুলিকে হয় পরিবাহীর পৃষ্ঠ দেশে অথবা নির্দিষ্ট বিন্দু আধানের আকারে পাওয়া যায়। এসব ক্ষেত্রে কোনো স্থানের প্রায় সব বিন্দুতে ρ এর মান শূন্য হবে। আধান ঘনত্ব ρ যেখানে শূন্য সেখানে

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (২.৬০)$$

এটিই ল্যাপলাসের সমীকরণ।

২.১০ স্থির তড়িৎ শক্তি (Electrostatic Energy)

স্থির অবস্থায় সম্পূর্ণ আধান পদ্ধতির শক্তি বিভব শক্তি (Potential energy) হিসেবে বিদ্যমান থাকে এবং বর্তমান আলোচনায় আমরা শুধু তড়িৎ মিথস্ক্রিয়া (interaction) জনিত বিভব শক্তি বিবেচনা করবো।

আমরা আগেই উল্লেখ করেছি যে একটি বিন্দু আধানের স্থির তড়িৎ শক্তি খুব নিকটতমভাবে বিন্দু আধানের স্থানে স্থির তড়িৎ প্রচ্ছন্ন বিভবের সাথে সম্পর্কিত।

একটি আধান q কে শূন্য বিভব থেকে v বিভবে আনতে বিভব শক্তি খরচ হয়

$$W = \frac{1}{2} q v \qquad (২.৬১)$$

অবিচ্ছিন্ন তড়িৎ আধান ঘনত্ব $\rho(x, y, z)$ এর জন্য আমরা q কে $\rho d\tau$ এবং সমষ্টিকরণকে সংকলন দ্বারা প্রতিস্থাপন করি

$$W = \frac{1}{2} \int_\tau v \rho d\tau \qquad (২.৬২)$$

যেখানে τ সমস্ত আধান ধারক যে কোনো আয়তন।

পয়সনের সূত্র অনুসারে ক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দুতে

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 v \qquad (২.৬৩)$$

এখন সমীকরণ (২.৬২) তে সমীকরণ (২.৬৩) বসিয়ে পাই

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_\tau v \nabla^2 v d\tau \qquad (২.৬৪)$$

নিম্নের ভেক্টর রাশি ব্যবহার করে একে আরো সহজতর করা যায়

$$\nabla . f\mathbf{A} = f(\nabla.\mathbf{A}) + \mathbf{A}.\nabla f$$

এখানে f এবং $\mathbf{A}$ যথাক্রমে স্কেলার ও ভেক্টর ফাংশন।

মনে করি $f = v$ এবং $\mathbf{A} = \nabla v$,

তাহলে $\quad \nabla . v \nabla v = v(\nabla.\nabla v) + \nabla v.\nabla v$

বা $\quad v \nabla^2 v = \nabla.(v\nabla v) - (\nabla v)^2$

এবং
$$W = -\frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_\tau \nabla.(v\nabla v)\, d\tau - \int_\tau (\nabla v)^2 d\tau\right] \qquad (২.৬৫)$$

অপসারিত মতবাদ প্রয়োগ করে ডানপক্ষের প্রথম পদকে আমরা τ আয়তন আবদ্ধকারী পৃষ্ঠ s কে একটি সংকলে এ রূপান্তর করতে পারি। এরূপে পাওয়া যায়

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_s (v\nabla v).da - \int_\tau (\nabla v)^2 d\tau\right] \qquad (২.৬৬)$$

এখন আমরা আধান বন্টন থেকে অনেক দূরে আবদ্ধকারী পৃষ্ঠ s ইচ্ছামতো পছন্দ করতে পারি তাহলে প্রথম সংকল এ v কমে যাবে $\frac{1}{r}$ দ্বারা, কারণ আধান বণ্টনের বিভব

এক পোলী পদ $\frac{1}{r}$ (1,r) দ্বারা কমে যায়, আবার দ্বিপোল ও চতুর্পোলে বিভব যথাক্রমে $\frac{1}{r^2}$ এবং $\frac{1}{r^3}$ দ্বারা কমে যায়। অতএব ∇v কমপক্ষে $\frac{1}{r^2}$ দ্বারা কমে যায়। যেহেতু পৃষ্ঠ আয়তন বৃদ্ধি পায় r^2 হারে, সুতরাং গোটা সংকল কমে যায় কমপক্ষে $\frac{1}{r}$ দ্বারা এবং একে ইচ্ছামতো ক্ষুদ্র করা যায় যদি পৃষ্ঠ S কে অনেক দূরে কল্পনা করা হয়। এভাবে (২.৬৬) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau \qquad (২.৬৭)$$

যেখানে
$$E = \left| \nabla v \right|$$

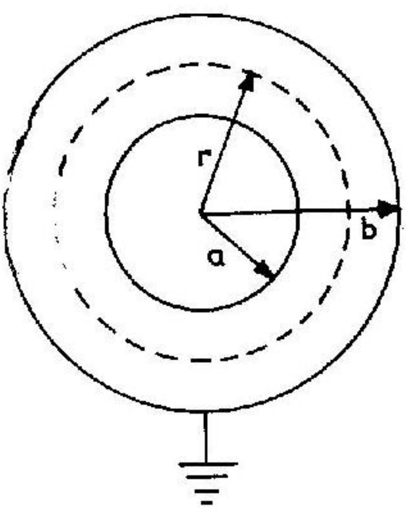
এ সংকল আধানসমূহের নিজস্ব শক্তির হিসাব রাখে। এটি সব সময়ই ধনাত্মক এবং একক আধানের জন্য এর মান স্পষ্টতই শূন্য নয়।

সমাধানকৃত সমস্যাবলী
(Solved Problems)

সমস্যাবলী (Problems)

১. দুটি ফাঁপা এককেন্দ্রিক গোলকাকার খোলক একে অপরের সাথে অন্তরিত। ভিতরের খোলকে আধান q আছে এবং বাইরের খোলক ভূমির সাথে সংযুক্ত। খোলকদ্বয়ের মধ্যেকার স্থানে তড়িৎ তীব্রতা ও বিভব নির্ণয় কর।

(Two hollw concentred spherical shells are insulated from each other. The inner shell has charge q and the outer one is grounded. Calculate the potential and electric field intensity in the space between the shells.)



সমাধান

খোলকের মধ্যেকার অঞ্চলে সাধারণ কেন্দ্র থেকে r দূরত্ব পর্যন্ত যে কোনো বিন্দুতে তড়িৎ তীব্রতা **E** এর মান একই হবে এবং অবশ্যই সর্বত্র এর দিক হবে অরীয়। অতএব r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকাকার পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলে গাউসীয় সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$4\pi r^2 E = q/\epsilon_0$$

বা $$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

কিন্তু $$E = -\frac{dv}{dr},$$

∴ $$dv = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

বা $$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

যেখানে C সংকলনের ধ্রুবক।

কিন্তু b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বাইরের গোলকাকার খোলকে, V = 0

∴ $$0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + C$$

বা $$C = -q/4\pi\epsilon_0 b$$

∴ $$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

২। একটি 80 PC আধানকে একটি 50 μC আধানের 5 cm নিচের কোনো অবস্থান থেকে 50 cm নিচের কোনো অবস্থানে সরাতে স্থির তড়িৎ বলের বিরুদ্ধে যে কাজ করতে হয় তা নির্ণয় কর।

(Calculate the work that must be done against electrostatic forces in moving a charge of – 80 PC from a position 5 cm below a charge of 50 μC to a position 50 cm below at.)

সমাধান

দুটি বিন্দুতে তড়িৎ বিভব নির্ণয় করে তাদের বিয়োগফল বের করে সমস্যাটি সমাধান করা যায়। কোনো বিন্দু আধান q থেকে r দূরত্বে কোনো বিন্দুতে বিভব হবে

$$V = q/4\pi\epsilon_0 r$$

অতএব আধানের ৫ সে.মি. নিচে বিভব হবে

$$V = \frac{50 \times 10^{-6}c}{4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12}c^2/n\text{-}m \times 0.5m}$$

$$= 9 \times 10^6 \text{ volt}$$

এবং আধানের ৫০ সে.মি. নিচে বিভব হবে

$$V_2 = \frac{50 \times 10^{-6}c}{4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12}c^2/n\text{-}m \times 0.5m}$$

$$= 9 \times 10^5 \text{ volt}$$

বিন্দু দুটির মধ্যে বিভব পার্থক্য

$$V_2 - V_1 = -8.1 \times 10^6 \text{ volt}$$

এখন -80 PC আধানকে এ বিভব পার্থক্যের মধ্য দিয়ে সরাতে কাজ করতে হবে

$$q(V_2 - V_1) = (-80 \times 10^{-12} C) \times (-8.1 \times 10^6 \text{ volt})$$

$$= 648 \times 10^{-6} \text{ Joules}$$

৩। একটি সাবান বুদবুদের ভিতরে ও বাইরে বাতাসের চাপ সমান। 2cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট সাবান বুদবুদ কি পরিমাণ বিভবে আহিত হয়েছে? সাবান দ্রবণের পৃষ্ঠটান হলো $0.0265\ Nm^{-1}$.

(The air pressure inside and outside of a soap bubble is equal. How much a soap bubble having 2 cm radius been charged where the surface tension of the soap solution is $0.0265\ Nm^{-1}$?)

সমাধান

একটি অনাহিত (uncharged) সাবান বুদবুদে পৃষ্ঠটানের প্রভাবে সংকোচন সৃষ্টি হয় যা চলতে থাকে যতক্ষণ না বুদবুদের ভিতরে ও বাইরে $4\gamma/R$ চাপ পার্থক্য সৃষ্টি হয়। এখানে γ হলো সাবান দ্রবণের পৃষ্ঠটান এবং R হলো বুদবুদের ব্যাসার্ধ। এই সংকোচন পৃষ্ঠটানজনিত অন্তর্মুখী (inward) চাপকে প্রতিহত করে। সাবান বুদবুদকে যদি আহিত করা হয় তাহলে একটি বহির্মুখী বল পৃষ্ঠটানজনিত সংকোচনকে বাধা দেয় এবং যদি খুবই বেশি হয় তবে বুদবুদের মধ্যেকার বাতাসের সংনমন (compression) কে প্রতিহত করতে পারে। ধরা যাক এমনি একটি স্থিতিশীল অবস্থা বিরাজমান এবং v ও q যথাক্রমে বুদবুদের বিভব ও আধান।

আহিত পরিবাহীর শক্তি $\qquad W = \frac{1}{2}vq$

এবং সেক্ষেত্রে $\qquad v = q/4\pi\epsilon_0 R \qquad$ (১)

অতএব $\qquad W = q^2/8\pi\epsilon_0 R \qquad$ (২)

যদি বুদবুদের ব্যাসার্ধ dR দ্বারা বৃদ্ধি পায় তবে তড়িৎ শক্তির পরিবর্তন ঘটে dW, যেখানে

$$dW = -\left(\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2}\right) dR \qquad (৩)$$

একই সময়ে পৃষ্ঠটান শক্তি বৃদ্ধি পায় একটি অংশ দ্বারা যা হলো পৃষ্ঠটান x আয়তন বৃদ্ধির সমান। অতএব,

$$dW' = 2 \times \gamma \times \{4\pi(R+dR)^2 - 4\pi R^2\} = 16\pi R\gamma dR \qquad (৪)$$

যেহেতু বুদবুদের দুটি পৃষ্ঠ আছে, আমরা dR^2 পদগুলো বাদ দেব

কিন্তু $\qquad -dW = dW'$

অতএব $q^2/8\pi\epsilon_0 R^2 = 16\pi R\gamma$

বা $q^2 = 8 \times 16 \times \pi^2\epsilon_0 R^3\gamma$ (৫)

সমীকরণ (১) কে বর্গ করে

$$v^2 = q^2/16\pi^2\epsilon_0^2 R^2$$

$$= \frac{8 \times 16 \times \pi^2\epsilon_0 R^3\gamma}{16\pi^2\epsilon_0 R^2} \quad \text{সমীকরণ (৫) হতে}$$

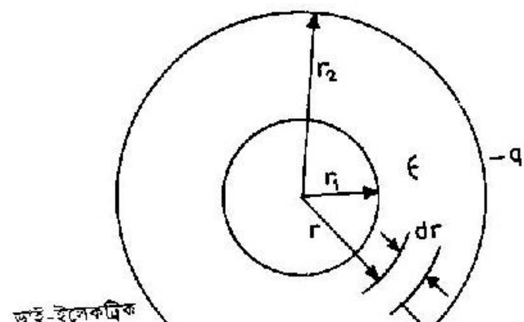
$$= \frac{8\gamma R}{\epsilon_0}$$

৫ একটি ধারকের দুটি এক কেন্দ্রিক গোলক আছে যাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 এবং r_2, যেখানে $r_1 < r_2$। গোলকদ্বয়ের মধ্যেকার ডাইইলেকট্রিক মাধ্যমের পরম ভেদ্যতা $\in$ এবং এর ডাইইলেকট্রিক শক্তি E_0। গোলকদ্বয়ের মধ্যে সর্বোচ্চ বিভব পার্থক্যের রাশি নির্ণয় কর যাতে তড়িৎ ক্ষেত্র কোথাও ক্রান্তি মান E_0 অতিক্রম না করে। r_2 কে ধ্রুব ধরে r_1 এর কোনো মানের জন্য এই বিভব পার্থক্য সর্বোচ্চ হবে এবং এক্ষেত্রে ধারক কত হবে?

(A capacitor consists of two concentric spheres of radii r_1 and r_2 respectively, where $r_1 < r_2$. The dielectric medium between the sphere has an absolute permittivity $\in$ and its dielectric strength is E_0. Derive an expression for the greatest potential difference between the two spheres, so that the field nowhere exceeds the critical value E_0. Assuming r_2 to be constant, for what value of r_1 will this potential difference be a maximum, and what will then be the capacitance ?)

সমাধান

ভিতরের গোলকের পৃষ্ঠে সুষমভাবে বণ্টিত আধান $+q$ এবং r ব্যাসার্ধে তড়িৎ ফ্লাক্স ঘনত্ব D_r এর মধ্যেকার সম্পর্ক গাউসীয় সূত্র প্রয়োগ করে পাওয়া যাবে। আধান $+q$ একটি উপযুক্ত গাউসীয় পৃষ্ঠ দ্বারা পরিবৃত্ত এবং এ ক্ষেত্রে গোলকের ব্যাসার্ধ r (চিত্র দ্রষ্টব্য)।



গাউসীয় সূত্র অনুসারে পৃষ্ঠব্যাপী তড়িৎ ফ্লাক্স ঘনত্বের অভিলাম্বিক উপাংশের পৃষ্ঠ সংকল সংবৃত আধান q এর সমান হবে।

সুতরাং $$q = 4\pi r^2 D_r \qquad (১)$$

বা $$D_r = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad (২)$$

কিন্তু $$D_r = \in E_r \qquad (৩)$$

যেখানে E_r হলো r ব্যাসার্ধে তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা।

সমীকরণ (২) ও (৩) থেকে

$$E_r = \frac{q}{4\pi\in r^2} \quad (৪)$$

গোলকদ্বয়ের মধ্যেকার বিভব পার্থক্য হবে,

$$V = -\int_{r_2}^{r_1} E_r\, dr \quad (৫)$$

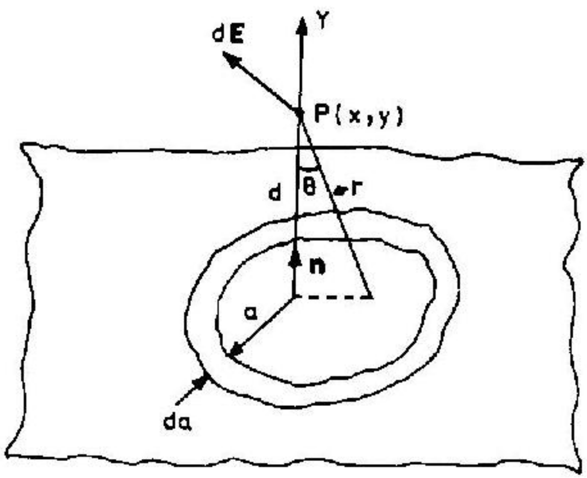
উপরিউক্ত রাশিতে Er dr হলো একটি একক আধানকে একটি ক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরাতে কাজের পরিমাণ। অতএব

$$V = -\frac{q}{4\pi\in}\int \frac{dr}{r^2}$$ সমীকরণ (৪) ব্যবহার করে

$$= \frac{q}{4\pi\in}\left[\frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r_2}\right]$$

৬। নিম্নের চিত্র থেকে আধানের একটি অনন্ত প্লেন পাত (sheet) এর জন্য তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা নির্ণয় কর। এখানে পৃষ্ঠ আধান ঘনত্ব ρ ।

(Find the electric field intensity due to an infinite plane sheet of charge. The situation is illustrated in the ρ.)



চিত্র : একটি অনন্ত আহিত প্লেন পাতের ক্ষুদ্র অংশ।

সমাধান

একটি আহিত পৃষ্ঠাংশ ds থেকে তড়িৎ ক্ষেত্রের নীট শীর্ষ (vertical) অবদান (চিত্র ৬)

$$dEy = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sigma ds}{r^2}\cos\theta$$

বৃত্তাংশ থেকে প্রতিযঙ্কিক শির অবদান নিচের রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায়,

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sigma \frac{2\pi a da}{r^2} \cos\theta$$

কিন্তু চিত্র থেকে $a = r\sin\theta, \ a = d\tan\theta$

বা $da = d\sec^2\theta \, d\theta$

যখন আহিত বৃত্ত দ্বারা তড়িৎ ক্ষেত্রের অবদান হবে

$$dE_y = \frac{\sigma}{2E_0} \sin\theta \, d\theta$$

অতএব তড়িৎ ক্ষেত্রের মোট পরিমাণ

$$E_y = \int_0^{\pi/2} dE_y = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

সুতরাং তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা হবে $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{n}$

যা ইঙ্গিত করে যে $\mathbf{E}$ ভেক্টর আহিত প্লেনের অভিলাম্বিক দিক নির্দেশ করে।

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

কিন্তু $C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ (৬)

সুতরাং $q = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2 V}{r_2 - r_1}$ (৭)

সমীকরণ (৪) থেকে $E_r = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2 V}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{r_1 r_2 V}{r^2 (r_2 - r_1)}$

এই রাশির সর্বোচ্চ মান হবে যখন $r = r_1$ এবং তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতার এই মান ডাইইলেকট্রিক শক্তি E_0 এর সমান হবে। এরূপে

$$E_0 = \frac{r_2 V}{r_1 (r_2 - r_1)}$$

এবং $V = \frac{E_0 r_1 (r_2 - r_1)}{r_2}$ (৮)

r_2 কে ধ্রুব ধরে V এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে। সমীকরণ (৮) কে r_1 এর প্রেক্ষিতে ব্যবকলন করে এর মান শূন্য বসিয়ে

$$\frac{dv}{dr_1} = 0 = \frac{E_0}{r_2}(r_2 - r_1)$$

বা $r_1 = \frac{1}{2} r_2$ সর্বোচ্চ বিভব পার্থক্যের জন্য।

সমীকরণ (৬) থেকে $r_1 = \frac{1}{2} r_2$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$C = 4\pi\epsilon r_2$$

৭। একটি গোলকাকার আয়তনব্যাপী আধান সুষমভাবে বণ্টিত। দেখাও যে, আয়তনের অভ্যন্তরে যে কোনো বিন্দুতে তড়িৎ তীব্রতা একই হবে যেন কেন্দ্রের নিকটবর্তী সকল আধান সেখানে কেন্দ্রীভূত এবং বাকি আধানগুলো সরিয়ে ফেলা হয়েছে।

(Charge is Uniformly distributed over a spherical volume. Show that the electric intensity at any point inside the volume is the same as if all the charges closer to the centre were concentrated there. and the rest of the charge removed).

সমাধান

আমরা বিবেচনা করবো একটি গোলক যা আহিত আয়তনের সাথে এককেন্দ্রিক এবং এর ব্যাসার্ধ r আহিত আয়তনের ব্যাসার্ধের চেয়ে কম। প্রতিসাম্য অনুসারে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলক পৃষ্ঠের সব বিন্দুতে তড়িৎ তীব্রতা একই হবে এবং এভাবে সম্পূর্ণরূপে এর দিক অরীয় হবে।

অতএব এমন গোলক থেকে ফ্লাক্স ঘনত্ব হতে হবে

$$E \times \text{Area of the sphere}$$

$$= E.4\pi r^2$$

এখন গাউসীয় সূত্র প্রয়োগ করে

$$E.4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

যেখানে q হলো গোলকের অভ্যন্তরে মোট আধান এবং ρ হলো আধান ঘনত্ব। সুতরাং

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

কিন্তু একই সমীকরণ পাওয়া যেত যদি r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের কেন্দ্রে সব আধান কেন্দ্রীভূত থাকত এবং বাকি আধানগুলো সরিয়ে ফেলা হতো।

প্রশ্নমালা

১। একটি সমবাহু ত্রিভুজের (বাহুর দৈর্ঘ্য 1m) তিনটি শীর্ষ বিন্দুতে 1μc এর তিনটি সমান বিন্দু আধান রাখা হয়েছে। প্রত্যেক আধানের উপর ক্রিয়াশীল বল নির্ণয় কর।

(Three equal point charges of 1μc are placed at the vertices of an equilateral triangle of side 1m. Find the force acting on each charge)

২। একটি গোলকাকার খোলক পৃষ্ঠ আধান বহন করে যাতে কোনো এক বিন্দু P তে পৃষ্ঠ ঘনত্ব $\sigma_0 \cos\theta$, যেখানে θ হলো ρ এর উপর ব্যাসার্ধ এবং খোলকের কেন্দ্রের মধ্যদিয়ে z–অক্ষের মধ্যকার কোণ। গোলকের ভিতরে ও বাইরে z–অক্ষের উপর তড়িৎ ক্ষেত্র নির্ণয় কর।

(A spherical shell carries a surface charge such that the surface density at a point P is $\sigma_0 \cos\theta$, where θ is the angle between the radius to P and the Z-axis through the centre of the sphere. Find the electric field on that axis, both inside and outside the sphere).

৩। দুটি এক কেন্দ্রিক গোলকাকার খোল (যাদের ব্যাসার্ধ a ও b এবং $b > a$) একটি ধারক তৈরি করেছে। খোলকদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থান শূন্য। বাইরের গোলকটি মাটিতে সংযুক্ত করা হয়েছে এবং ভিতরের গোলকে q আধান আছে। নিম্নোক্তগুলি নির্ণয় কর :

(ক) গোলকদ্বয়ের মধ্যে তড়িৎ ক্ষেত্র (গাউসীয় সূত্র ব্যবহার করতে হবে)

(খ) গোলকদ্বয়ের মধ্যে বিভব পার্থক্য

(Two conductors that form a capacitor consist of concentric spherical shells of radii a and b, where $b > a$, and the space between the spheres is evacuated. With the outer sphere grounded and with a charge q on the inner sphere, calculate.)

(a) The electric field between the spheres, using Gaus's law.

(b) The potential difference between the spheres.

৪। আধানের একটি ফ্লাট পাতে সুষম পৃষ্ঠ ঘনত্ব হলো σ। (ক) দেখাও যে এর নিকটে তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা $\sigma/2\epsilon_0$। (খ) তড়িৎ বিভব নির্ণয় কর।

(a) Show that the electric field intensity been a flat sheek of charge having a uniform surface density σ is $\sigma/2\epsilon_0$.

(b) Deduce the value of the electric potential.

৫। ১০ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলাকার চাকতি মোট আধান Q কুলম্ব দ্বারা সুষমভাবে আহিত। চাকতি থেকে ২০ সে.মি. দূরে এর অক্ষ বরাবর কোনো এক বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্র তীব্রতা নির্ণয় কর।।

(A circular disk of 10 cm radius is charged uniformaly with a total charge of Q coulomb. Find the electric field intensity at a point 20 cm away from the disk, along its axis.)

৬। একটি পাতলা অর্ধ গোলকাকার কাপ (অন্তরক) এর ব্যাসার্ধ r এবং এতে আধান q এর পৃষ্ঠব্যাপী সুষমভাবে বণ্টিত। অর্ধ গোলকাকারটির ফ্লাট পৃষ্ঠের কেন্দ্রে তড়িৎ ক্ষেত্র নির্ণয় কর।

(A thin hemispherical cup (an insulator) of radius r bears a charge q uniformly distributed over its surface. Find the electric field at the centre of this flat surface of the hemisphere).

৭। একটি বৃত্তাকার বেলন দেয়া আছে যার ব্যাসার্ধ R এবং দৈর্ঘ্য L এবং এতে সুষম আধান ঘনত্ব হলো ρ। বেলনের অক্ষে কিন্তু আধান বণ্টনের বাইরে কোনো বিন্দুতে স্থির তড়িৎ বিভব নির্ণয় কর।

(Given a circular cylinder of radius R and length L containing uniform charge density ρ. Calculate the electrostatic potential at a point on the cylinder axis but external to the distribution).

৮। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ১৫ সে.মি.। এর তিনটি কোণের প্রতিটি আধান আছে 3×10^{-9}c। বর্গের শূন্য কোণে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান ও দিক নির্ণয় কর।

(Point charges of 3×10^{-9}c are situated at each of three corners of a square whose side is 15cm. Find the magnitude and direction of the electric field at the vacant corner point of the square).

তৃতীয় অধ্যায়

স্থির চুম্বকবিদ্যা

(Magnetostatics)

৩.০ সূচনা

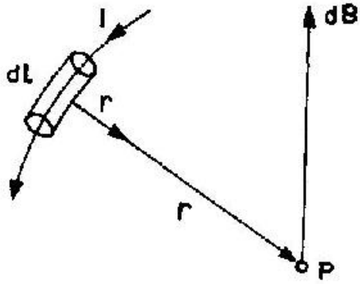
দ্বিতীয় অধ্যায়ে আমরা স্থির তড়িৎবিদ্যার বিভিন্ন দিক নিয়ে আলোচনা করেছি। বর্তমান অধ্যায়ে স্থির চুম্বক সম্বন্ধে আলোচনা করবো। এটি সাধারণত স্থির তড়িৎ এর মধ্যে সংঘটিত মিথস্ক্রিয়া (interaction) বর্ণনা করে। ঐতিহাসিক দৃষ্টিকোণ থেকে তড়িৎ ঘটনাবলী যতদিন ধরে পরিচিত এবং পঠিত হয়েছে, চৌম্বক ঘটনাবলীও অন্ততপক্ষে ততদিন ধরে পরিচিত। পার্থক্যস্বরূপ, স্থির তড়িৎ থেকে চৌম্বক ক্ষেত্রের মৌলিক সূত্রাবলী চৌম্বক পদার্থের সাথে মানবজাতির আদিকালের সংস্পর্শ থেকে সরাসরি অনুসরণ করে না। এর নানাবিধ কারণ আছে কিন্তু সবগুলোই স্থির চুম্বক ও স্থির তড়িৎ এর মৌলিক পার্থক্য থেকে উদ্ভুত। পার্থক্যটি হলো চৌম্বকের ক্ষেত্রে কোনো আধান নেই, অর্থাৎ চৌম্বক ঘটনাবলী তড়িৎ ঘটনাবলী থেকে সম্পূর্ণ ভিন্ন এবং বহুদিন যাবৎ এদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক স্থাপিত হয় নি। চৌম্বক পদার্থের উপস্থিতিতে দ্বিপোলগুলি কোনো নির্দিষ্ট দিকে বিন্যাসিত হয় এবং সংজ্ঞা অনুসারে এই দিকই হলো চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্ব **B** এর দিক।

৩.১ চৌম্বক বল ও বায়োট-সাভার্ট সূত্র (Magnetic Force and Biot-Savart Law)

১৮১৯ সালে ওরস্টেড লক্ষ্য করলেন যে তড়িৎবাহী তারের সন্নিকটে যদি কোনো স্থায়ী চৌম্বক দ্বিপোল রাখা হয় তবে এতে বিসরণ (deflection) ঘটে। সুতরাং তড়িৎ হলো চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্বের উৎস। প্রথমে ১৮২০ সালের বায়োট-সাভার্ট এবং পরবর্তীতে (১৮২০-১৮২৫) অ্যাম্পিয়ার আরো বিস্তৃতভাবে পরীক্ষার দ্বারা তড়িৎ এর সাথে চৌম্বক আবেশ (magnetic induction) এর মৌলিক সূত্রগুলোর সম্পর্ক এবং দুই প্রকার তড়িৎ এর মধ্যে বলের সূত্র স্থাপন করেন।

ধরা যাক, একটি ফিলামেন্ট তারের ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য dl (যার দিক তড়িৎ প্রবাহের দিকে) এবং এর মধ্য দিয়ে তড়িৎ প্রবাহ I প্রবাহিত হয়। r যদি ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য dl থেকে পর্যবেক্ষণ বিন্দু P পপর্যন্ত স্থানাংক ভেক্টর হয় তবে P বিন্দুতে ফ্লাক্স ঘনত্ব dB এর মান ও দিক হবে

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_1}{r^2}\right) \qquad (৩.১)$$



যেখানে r_1 একক ভেক্টর এবং μ_0 হলো মুক্ত স্থানের প্রবেশ্যতা (permeabilities) যার মান $4\pi \times 10^{-7}$ নিউটন/অ্যাম্পিয়ার^2।

যদি তড়িৎ প্রবাহের পরিবর্তে একটি একক আধান q থাকে এবং এটি v বেগে চলতে থাকে তবে ফ্লাক্স ঘনত্ব হবে

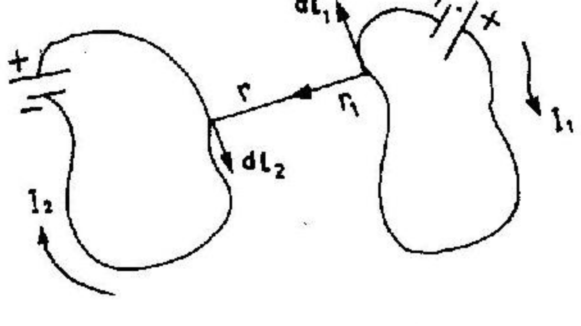
চিত্র ৩.১ : তড়িৎ উপাদান Idl এর জন্য ক্ষুদ্রতম চৌম্বক আবেশ dB।

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}_1}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{E} \qquad (৩.২)$$

যেখানে $\mathbf{E}$ হলো আধান q এর স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র। সাধারণ অভিজ্ঞতায় জানা যায় যে তড়িৎ প্রবাহবাহী বর্তনীসমূহ একে অপরের উপর বল প্রয়োগ করে।

ধরা যাক, দুটি আবদ্ধ প্রবাহ লুপ 1 ও 2 যথাক্রমে I_1 ও I_2 প্রবাহ বহন করে এবং রেখাংশ dl থেকে dl_2 পর্যন্ত ভেক্টর দূরত্ব $\mathbf{r}$ (চিত্র ৩.২)।



চিত্র ৩.২ : দুটি প্রবাহ I_1 ও I_2

দুটি প্রবাহই যখন মুক্ত স্থানে অবস্থিত তখন প্রবাহ দ্বারা অন্য প্রবাহের উপর প্রয়োগকৃত বল বেশ জটিল; কিন্তু গুণফল I_1I_2 এর আনুপাতিক।

প্রবহ I_1 দ্বারা I_2 এর উপর প্রয়োগকৃত বল হবে

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_1)}{r^2} \text{ নিউটন} \qquad (৩.৩)$$

সেখানে কেবল সংকলনদ্বয় বর্তনীদ্বয়ের উপর নির্ণীত। এটিই হলো চৌম্বক বল সূত্র এবং প্রবাহবাহী লুপের মধ্যে বল সম্বন্ধে অ্যাম্পিয়ারের পর্যবেক্ষণের গাণিতিক বর্ণনা। dl_1 এবং dl_2 ভেক্টরদ্বয় প্রবাহের দিক নির্দেশ করে। কুলম্বের সূত্র স্থির তড়িৎ আধানের মধ্যে মিথষ্ক্রিয়া বর্ণনা করে। চৌম্বক বল সূত্র তড়িৎ প্রবাহের মধ্যেকার বলের বর্ণনা দেয়।

(৩.৩) সমীকরণে বল $\mathbf{F}_{12}$ কে এমনভাবে প্রকাশ করা হয়েছে যেন dl_1 এবং dl_2 প্রতিসমিকভাবে কাজ না করে। এটি খুবই অসুবিধাজনক, কারণ নিউটনের তৃতীয় সূত্র নিশ্চিতভাবে স্থির প্রবাহবাহী এক জোড়া বর্তনীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য এবং $\mathbf{F}_{12}$ অবশ্যই $\mathbf{F}_{21}$ এর সমান হবে। সংকল চিহ্নের অধীন ত্রি-ভেক্টর গুণনকে সম্প্রসারণ করে বল $\mathbf{F}_{12}$ কে প্রতিসমিক আকারে প্রকাশ করা যায়,

$$\frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_1)}{r^2} = \frac{d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2.\mathbf{r}_1)}{r^2} - \frac{\mathbf{r}_1 (d\mathbf{l}_1.d\mathbf{l}_2)}{r^2} \qquad (৩.৪)$$

ডানপক্ষের প্রথম রাশিটি dl_1 এর সংকলে একটি পূর্ণ ব্যবকলনী জড়িত করেছে। ফলে, যদি বর্তনীগুলো সংবৃত হয় বা অনন্ত পর্যন্ত প্রসারিত থাকে তাহলে (৩.৩) এর সংকলে এটি কোনো অবদান রাখে না। সুতরাং বাকি থাকলো শুধু দ্বিতীয় রাশির দ্বৈত সংকল, অর্থাৎ

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\mathbf{r}_1 (d\mathbf{l}_1.d\mathbf{l}_2)}{r^2} \qquad (৩.৫)$$

অতএব $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, কারণ একক ভেক্টরের দিক হবে সেই বর্তনীর দিক যার উপর বল নির্ণয় করতে হবে। ফলে এর দিক $\mathbf{F}_{12}$ এর জন্য এক রকম হবে এবং $\mathbf{F}_{21}$ এর জন্য অন্যরূপ (৩.৫) সহজতর তথাপি এটি তেমন দরকারি নয়। কারণ উপযুক্ত সংকলে $\mathbf{F}_{12}$ বলকে প্রবাহ 1 এর ক্ষেত্রের সাথে প্রবাহ 2 এর মিথষ্ক্রিয়া (interaction) হিসেবে প্রকাশ করা যায় না। যাহোক আমরা (৩.৩) সমীকরণে এরূপ কার্য সম্পন্ন করতে পারি, কারণ

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \oint_2 d\mathbf{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_1}{r^2}\right)$$

$$= I_2 \oint d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 \qquad (৩.৬)$$

যেখানে $\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_1}{r^2}$ ওয়েবার/মিটার২ (৩.৭)

হলো বর্তনী 2 এর ক্ষুদ্র অংশ dl_2 এর অবস্থান বর্তনীর জন্য চৌম্বক আবেশ। যথারীতি একক ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ উৎস থেকে পর্যবেক্ষণ বিন্দুর দিক নির্দেশ করে।

চৌম্বক আবেশ $\mathbf{B}$ এর জন্য সমীকরণ (৩.৭) হলো বায়োট-সাভার্ট সূত্র। সংকলনটি ব্যতিক্রমমূলকভাবে সমাপন করা যায় এবং দেখা যায় যে, যে এলাকায় চৌম্বক আবেশ $\mathbf{B}$ সেখানে প্রবাহ I বহনকারী তারের ক্ষুদ্র অংশ dl এর উপর ক্রিয়াশীল বলের উপাদান dF হবে

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \qquad (৩.৮)$$

স্থির তড়িৎবিদ্যার মতো (যেখানে আমরা তড়িৎ ক্ষেত্র বর্ণনার জন্য বলরেখা ব্যবহার করেছি) $\mathbf{B}$ এর রেখা অংকন করে আমরা চৌম্বক ক্ষেত্র বর্ণনা করতে পারি। একইভাবে ফ্লাক্সের ধারণা

ব্যবহার সুবিধাজনক, পৃষ্ঠ S এর মধ্য দিয়ে চৌম্বক আবেশের ফ্লাক্সকে S পৃষ্ঠব্যাপী **B** এর অভিলাম্বিক উপাংশ হিসেবে বর্ণনা করা যায় :

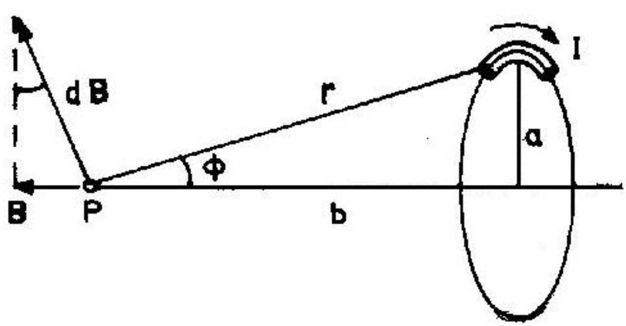
$$\phi = \oint_S \mathbf{B}.d\mathbf{a} \qquad (৩.৯)$$

ফ্লাক্স ϕ কে ওয়েবার এ প্রকাশ করা হয়।

৩.২.১ প্রবাহ লুপ এর অক্ষ বরাবর চৌম্বক ক্ষেত্র B নির্ণয় (Calculation of the magnetic field along the axis of a current loop)

ধরা যাক, লুপ এর অক্ষ বরাবর P একটি বিন্দু। সমীকরণ (৩.১) প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_1}{r^2}\right) \qquad (৩.১০)$$



চিত্র ৩.৩ : প্রবাহ লুপের অক্ষ বরাবর চৌম্বক ক্ষেত্র।

যেহেতু লুপের চতুর্দিকে সব উপাদানের জন্য $\mathbf{r}_1$ হলো **Idl** এর উপর লম্ব, অতএব (৩.১০) সমীকরণে ক্রস গুণনে $\sin\theta$ এর মান এক। যাহোক, **dB** এর ভেক্টর যোগ নিয়ে আমরা অবশ্যই মনে করবো যে প্রত্যেক dB, P বিন্দুতে $\mathbf{r}$ এর উপর অভিলাম্বিক। প্রতিসাম্যের কারণে যখন লুপের চতুর্দিকে সমীকরণটি সংকলিত হবে তখন **B** এর যে সকল উপাংশ b অক্ষের সমান্তরাল নয় সেগুলো বাতিল হয়ে যাবে। সুতরাং অক্ষ বরাবর $d\mathbf{B}\sin\theta$ এর উপাংশগুলি যোগ করে লব্ধ ক্ষেত্র পাওয়া যাবে। এরূপে **B** হবে :

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\phi}{r^2}\int dl \qquad (৩.১১)$$

আবার লুপের চতুর্দিকে $\int dl = 2\pi a$

সুতরাং যদি $\sin\phi$ এবং r কে ধ্রুব a ও b এর পরিপ্রেক্ষিতে প্রকাশ করা হয় ;

অর্থাৎ $r^2 = a^2 + b^2$ এবং $\sin\phi = \frac{a}{r}$, তবে

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(a^2+b^2)} \cdot 2\pi a$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \quad \text{ওয়েবার/মিটার}^2 \qquad (৩.১২)$$

লুপের কেন্দ্রে $b = 0$ এবং $B = \frac{\mu_0}{2a}$; এর দিক লুপের অক্ষ বরাবর হবে। যদি কুণ্ডলীতে পাকের সংখ্যা N হয় তবে ফল N দ্বারা গুণিত হবে। যখন আমরা P বিন্দুতে লুপ হতে অনেক দূরে $(b>>a)$ বিবেচনা করবো তখন B হবে

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2IA}{r^3} \qquad (৩.১৩)$$

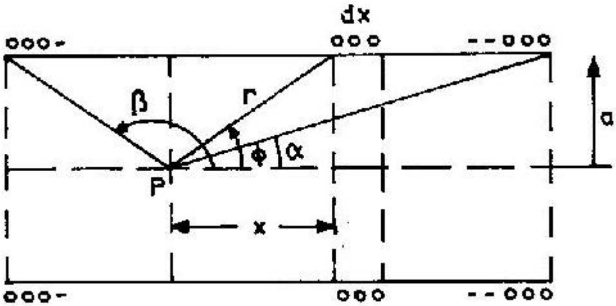
এখানে $A = \pi a^2$, লুপের ক্ষেত্রফল। IA সংখ্যাটিকে চৌম্বক দ্বিপোল মোমেন্ট বলা হয়। B এর দিক নির্ভর করবে লুপের প্রবাহের দিকের উপর।

৩.১.২ সলিনয়েডের অক্ষ বরাবর চৌম্বক ক্ষেত্র নির্ণয় (Calculation of the magnetic field along the axis of a solenoid)

একটি বেলনের উপর পেঁচানো কুণ্ডলীকে সলিনয়েড বলে। সলিনয়েডের অভ্যন্তরে কোনো বিন্দু P তে চৌম্বক ক্ষেত্র বের করতে আমরা পূর্বোক্ত অনুচ্ছেদের (৩.২.১) অর্থাৎ লুপের অক্ষ বরাবর ক্ষেত্রের ফলাফল ব্যবহার করবো।

ধরা যাক, সলিনয়েডটির দৈর্ঘ্য L এবং এতে মোট পাকের সংখ্যা N। আমরা এখন $I(N/L)dx$ প্রবাহবাহী dx প্রস্থ সম্পন্ন সলিনয়েডের একটি পাতলা অংশে সমীকরণ (৩.১২) প্রয়োগ করবো। সুতরাং আমার পাই

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{2L} \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$$



চিত্র ৩.৪ : সলিনয়েডের অভ্যন্তরে চৌম্বক ক্ষেত্র।

এই সমীকরণটি এখন সংকলিত করতে হবে। পরিবর্তী হিসেবে আমরা ϕ ব্যবহার করবো। ধরা যাক, $x = a\cot\phi$, $\quad \therefore \quad dx = -a\,\mathrm{cosec}^2\phi\, d\phi$

সুতরাং $dB = -\frac{\mu_0 NI}{2L} \sin\phi\, d\phi$

অতএব সমগ্র সলিনয়েডের জন্য

$$\mathbf{B} = \int_{\beta}^{\alpha} dB = -\frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\beta}^{\alpha} \sin\phi \, d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2L}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

আমরা যদি P বিন্দুটি একটি লম্বা সলিনয়েডের মাঝখানে নেই তবে $\alpha = 0$ এবং $\beta = 180^\circ$.

অতএব আমরা পাই,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{L} \quad \text{ওয়েবার/মিটার}^2 \qquad (৩.১৪)$$

আবার সলিনয়েডের এক প্রান্তে P বিন্দু নিলে $\alpha = 90^\circ$ এবং $\beta = 180^\circ$

অতএব $$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2L} \quad \text{ওয়েবার/মিটার}^2 \qquad (৩.১৫)$$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে একটি সলিনয়েডের প্রান্তে চৌম্বক ক্ষেত্র এর কেন্দ্রের অর্ধেক। সমীকরণ (৩.১৪) তে $\frac{NI}{L}$ সংখ্যাটিকে সলিনয়েডের তড়িৎ ঘনত্ব বলে। অর্থাৎ এটি কুণ্ডলীর চতুর্দিকে প্রতি মিটার কুণ্ডলীতে ছড়ানো অ্যাম্পিয়ারের সংখ্যা.

৩.২ লরেনৎস বল (Lorentz Force)

সমীকরণ (৩.৬) হলো চৌম্বক ক্ষেত্রে রাখা সংবৃত বর্তনীতে প্রদত্ত বল। এটি দ্বারা চৌম্বক ক্ষেত্র **B** তে v বেগে চলমান একটি একক আধান q এর উপরের বল নির্ণয় করা যায় প্রবাহ অংশ Idl এর উপর বল হবে

$$I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

যদি বর্তনী তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল a হয় তবে

প্রবাহ $$I = n\,(dav)\,q \qquad (৩.১৬)$$

যেখানে n হলো প্রতি একক আয়তনে বাহকের সংখ্যা, v হলো গড় তাড়ন বেগ (drift velocity) এবং q হলো একটি বাহকের আধান।

এই সম্পর্কের কারণ, প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত মোট আধান হলো বাহকের উপরের আধান যা তারের v দৈর্ঘ্যে থাকে.

dl অংশে বল হবে $\quad n\, da\, dl\, q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

এবং **B** ক্ষেত্রে **v** বেগে প্রবাহিত একটি একক আধান q এর উপরের বল হলো

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

এই বল বেগ **v** ও স্থানীয় চৌম্বক আবেশ **B** এর উপর অভিলাম্বিক।

যদি আরো একটি তড়িৎ ক্ষেত্র **E** থাকে, তবে সাধারণভাবে বল হবে

$$q\,[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]$$

এটিই হলো লরেনৎস–এর বল।

৩.৩ চৌম্বক আবেশ B এর অপসারিতা (Divergence of the Magnetic Induction **B**)

চৌম্বক আবেশ **B** এর অপসারিতা শূন্য বলে আশা করা যায়, কারণ ক্ষেত্র রেখাগুলি নিজেদের প্রতি নিকটবর্তী এবং এদের কোনো উৎস বিন্দু নেই। প্রথমে আমরা এটি প্রবাহের একটি সমান্য অংশের জন্য প্রমাণ করবো যা পরে সম্পূর্ণ বর্তনীর জন্য প্রযোজ্য হবে। ১.১২ অনুচ্ছেদের ৩নং ভেক্টর অভেদ অনুসারে

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}.\mathrm{curl}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}.\mathrm{curl}\,\mathbf{B} \qquad (৩.১৭)$$

সমীকরণ (৩.১) এ এটি প্রয়োগ করে একটি প্রবাহ অংশ Idl এর জন্য আমরা পাই,

$$\mathrm{div}\,(d\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}.\mathrm{curl}\,d\mathbf{l} - d\mathbf{l}.\mathrm{curl}\,\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}\right] \qquad (৩.১৮)$$

প্রথম পদটির মান শূন্য হবে কারণ dl একটি ধ্রুব ভেক্টর। যেহেতু $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}$ দ্বিতীয় পদে curl grad $\left(\frac{1}{r}\right)$ গুণাংকটি আছে যার মান শূন্য, কারণ যে কোনো গ্রাডিয়েন্টের কার্ল শূন্য (১.১২ (১২))। অতএব একটি প্রবাহ অংশের জন্য আমরা পাই,

$$\mathrm{div}\,(d\mathbf{B}) = 0 \qquad (৩.১৯)$$

এটি অনেকগুলি প্রবাহ অংশের যোগফলের জন্য তথা সমগ্র বর্তনীর জন্য সত্য। অতএব সাধারণভাবে আমরা পাই,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad (৩.২০)$$

যেহেতু $\nabla.\mathbf{B}$ এর মান শূন্য, অতএব এর অর্থ হলো **B** এর উৎসের কোনো অস্তিত্ব নেই।

৩.৪ চৌম্বক আবেশ B এর কার্ল (Curl of Magnetic Induction **B**)

আমরা প্রথমে দেখাবো যে যদি ক্ষেত্র বিন্দুতে কোনো প্রবাহ না থাকে তবে একটি স্কেলার বিভব থেকে **B** পাওয়া যাবে। যেহেতু যে কোনো ভেক্টরের কার্লগ্রাড শূন্য, অতএব এই সীমাবদ্ধতায় curl **B** = 0 । আমরা এখন একটি তারের সংবৃত বর্তনীতে প্রবাহিত স্থিতি প্রবাহের ক্ষেত্র বিবেচনা করবো (চিত্র ৩.৫ক)। আমরা যদি একটি ক্ষেত্র বিন্দুকে du দ্বারা স্থানচ্যুত করি তাহলে লুপ দ্বারা তৈরি ঘনকোণের পরিবর্তন হবে $d\Omega$ । ক্ষেত্র বিন্দু P কে নির্দিষ্ট রেখে এটি বর্তনীকে – du দ্বারা সরানোর সমান হবে। – du x dl ক্ষেত্রফল দ্বারা তৈরি ঘনকোণসমূহের পরিবর্তনের যোগফল হবে $d\Omega$। ব্যাসার্ধ ভেক্টর r এর উপরে এই ক্ষেত্রফল (– du x dl) এর অভিক্ষেপ হবে $-d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}.\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}$

এবং $d\Omega$ এর বৃদ্ধি হবে $$-d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}.\frac{\mathbf{r}_1}{r^2} = -d\mathbf{u}.\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৩.২১)$$

সমগ্র লুপের জন্য সংকলন নিলে আমরা পাই,

$$d\Omega = -d\mathbf{u}.\oint\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৩.২২)$$

যাহোক, সরণ du এর জন্য Ω এর পরিবর্তন হবে Ω এর গ্রাডিয়েন্ট এবং du এর গুণফলের সমান, অর্থাৎ

$$d\Omega = d\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,\Omega \qquad (৩.২৩)$$

সমীকরণ (৩.২২) এবং (৩.২৩) থেকে লিখতে পারি

$$-\text{grad}\ \Omega = \oint \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৩.২৪)$$

এখন সমীকরণ (৩.১) ও (৩.২৪) থেকে আমরা পাই,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\text{grad}\ \Omega \qquad (৩.২৫)$$

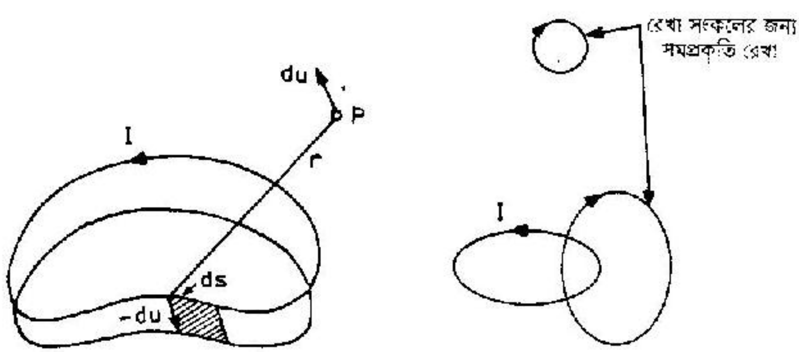
অতএব $\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right)$ একটি স্কেলার বিভব, যার $-$ve গ্রাডিয়েন্ট **B** কে সৃষ্টি করবে। যে কোনো সমস্যা যা প্রবাহ লুপ আরোপ করে সৃষ্টি হয় এবং যেখানে ক্ষেত্র বিন্দুতে প্রবাহ ঘনত্ব শূন্য সেখানে Curl $\mathbf{B} = 0$।

সাধারণভাবে এটি প্রতীয়মান হয় না যে $\mathbf{B.dl}$ এর রেখা সংকল শূন্য। এটি সত্য হবে কেবল যদি সমপ্রকৃতি রেখার (contour) অভ্যন্তরে সর্বত্র (যার চতুর্দিক দিয়ে রেখা সংকল নেয়া হয়েছে) Curl $\mathbf{B} = 0$ এবং এটি ঘটবে একমাত্র তখনই যখন কোনো প্রবাহ এই সমপ্রকৃতি রেখা স্পর্শ না করে। এখন আমরা সমীকরণ (৩.২৩) ও (৩.২৫) থেকে রেখা সংকল নির্ণয় করবো

$$\oint \mathbf{B.dl} = -\oint \text{grad}\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right).\,\mathbf{dl}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint d\Omega \qquad (৩.২৬)$$

সংকলের পথ যদি এমন হয় যে এটি প্রবাহবাহী পরিবাহী সংবৃত করে না, তাহলে একটি সংবৃত লুপের জন্য $\oint d\Omega = 0$ এবং $\oint \mathbf{B.dl} = 0$। যাহোক, মনে করি সংকলনের পথ তারকে অন্তর্ভুক্ত করে (চিত্র ৩.৫ খ)।



(ক) (খ)

চিত্র ৩.৫ক : একটি সংবৃত লুপে প্রবাহিত স্থির প্রবাহ।

চিত্র : ৩.৫ খ

লুপের প্লেন থেকে শুরু করে ঘন কোণ হবে 2π। আমরা মনে করি Ω, +ve হবে যখন আমরা লুপের প্লেনের উপরে এবং – ve হবে যখন আমরা প্লেনের নিচে। সংকলের সমপ্রকৃতি রেখার মাঝামাঝি এই কোণের মান শূন্য হবে এবং তারপর হবে -2π।

এভাবে $$d\Omega = -4\pi \text{ হবে} \qquad (৩.২৭)$$

এবং $$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint d\Omega$$

$$= \mu_0 I \qquad (৩.২৮)$$

অতএব একটি সংবৃত সমপ্রকৃতি রেখার ধারে $\mathbf{B}$ এর স্পর্শক উপাংশের সংকল হবে লুপের প্রবাহ I কে μ_0 দ্বারা গুণফলের সমান। একে বলা হয় বর্তনীর আকারে অ্যাম্পিয়ারের সূত্র। সংকলে ভিতরে অনেক লুপ থাকতে পারে এবং প্রত্যেককে আলাদাভাবে গণ্য করে আমরা পাই,

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_n I_n \qquad (৩.২৯)$$

যেখানে $\sum_n I_n$ হলো সংকলের সমপ্রকৃতি রেখা দ্বারা সংবৃত পৃষ্ঠে প্রবাহিত মোট প্রবাহ। সমীকরণ ৩.২৮) হলো সংকল আকারে অ্যাম্পিয়ারের সূত্র। এই সমীকরণকে আমরা স্টোক এর মতবাদ প্রয়োগ করে অন্যভাবে প্রকাশ করতে পারি।

অতএব $$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}.d\mathbf{a}$$

$$= \int_S \text{curl } \mathbf{B}.\text{dba} \qquad (৩.৩০)$$

যেখানে $\mathbf{J}$ হলো প্রবাহ ঘনত্ব এবং $\int_S \mathbf{j}.d\mathbf{a}$ হলো সমপ্রকৃতি রেখার ভিতর দিয়ে প্রবাহিত মোট প্রবাহ। যে পৃষ্ঠই নির্বাচিত করা হোক না কেন পৃষ্ঠ সংকল দুটি সমান হবে এবং এভাবে সব বিন্দুতে সংকলসমূহ সমান হবে।

অতএব আমরা পাই,

$$\text{Curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad (৩.৩১)$$

এটিই হলো ব্যবকলন আকারে অ্যাম্পিয়ারের সূত্র। এটি শুধু স্থির ক্ষেত্র এবং চৌম্বক ক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে কার্যকর। যদি $\mathbf{J} = 0$ হয় তবে, curl $\mathbf{B} = 0$। যদি ক্ষেত্র বিন্দুতে $\mathbf{J} \neq 0$ হয় তবে কোনো স্কেলার বিভবের অস্তিত্ব থাকে না এবং তখন অবশ্যই অন্য কোনো পদার্থ ব্যবহার করতে হয়। আমরা এই নতুন বিভব নিতে চাই যাতে সমীকরণ div $\mathbf{B} = 0$ আপনা-আপনি পূর্ণ হয়। এ রকম বিভব হলো ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ যেখানে $\mathbf{A}$ থেকে $\mathbf{B}$ পাওয়া যায়,

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} \qquad (৩.৩২)$$

সমীকরণ (৩.৩১) ও (৩.৩২) থেকে পাই

$$\text{curl curl } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad (৩.৩৩)$$

কিন্তু আমরা জানি, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

ভেক্টর বিশ্লেষণ থেকে জানা যায় যে, যদি কোনো ভেক্টরকে অন্য একটি ভেক্টরের কার্ল হিসেবে প্রকাশ করা হয়, যেমন $\mathbf{B} = \text{curl}\,\mathbf{A}$ তখন $\mathbf{B}$ এর মানকে প্রভাবিত না করেই $\text{div}\,\mathbf{A}$ কে ইচ্ছামতো পছন্দ করা যায়।

অতএব $\nabla.\mathbf{A} = 0$ ধরে নিলে আমরা পাই

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \qquad (৩.৩৪)$$

এটি আমাদিগকে $\mathbf{A}$ কে ব্যবহার করতে সীমিত করে না কারণ $\mathbf{A}$ এর ব্যবহার সমীকরণ (৩.৩২) হতে পাওয়া যায়। অতএব আমাদের কাছে শুধু $\text{curl}\,\mathbf{A}$ গুরুত্বপূর্ণ। $\mathbf{A}$ কে ভেক্টর বিভব বলা হয়

আমরা এখন আয়তাকার স্থানাংক সমীকরণ (৩.৩৪) সমাধান করবো। শুধু x উপাংশ বিবেচনা করে

$$(\nabla^2\mathbf{A})_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$
$$= -\mu_0 \mathbf{J}_x \qquad (৩.৩৫)$$

পয়সনের সমীকরণের সমাধান থেকে,

$$\nabla^2\phi = -\epsilon_0, \qquad \phi = \int_\tau \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (৩.৩৬)$$

একইভাবে A_y ও A_z এর সমাধান পাওয়া যাবে এবং এই সমস্ত সমাধান যোগ করে আমরা পাই,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}}{r}d\tau \qquad (৩.৩৭)$$

আমরা যদি একটি বর্তনী নেই যাতে প্রবাহ I আছে তবে সমীকরণ (৩.৩৭) থেকে পাই,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\mathbf{dl}}{\mathbf{r}} \qquad (৩.৩৮)$$

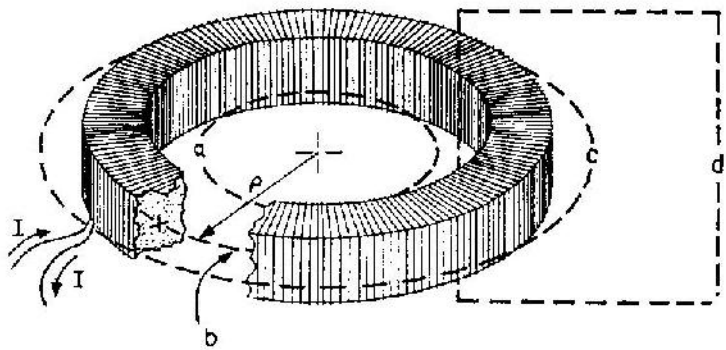
এখনে উল্লেখ্য যে ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ উপরের সংকেল দ্বারা অদ্বিতীয়ভাবে বর্ণিত নয়। প্রকৃত পক্ষে আমরা এই সংকেলে যে কোনো সংখ্যা যোগ করতে পারি যার কার্ল শূন্য নয় এবং এতে এর মানের কোনো প্রভাব পড়বে না।

৩.৫ টরোয়ড কুণ্ডলী (The Toroid Coil)

আমরা এখন আঁটসাঁটভাবে পেঁচানো একটি টরোয়ড কুণ্ডলীর ভিতরে ও বাইরে চৌম্বক আবেশ $\mathbf{B}$ ও ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ এর মান ও দিক নির্ণয় করবো। পথ a বরাবর $\mathbf{B}$ এর রেখা সংকল শূন্য হবে কারণ এই পথের সংস্পর্শে কোনো প্রবাহ নেই (চিত্র ৩.৬)।

তাহলে এ অঞ্চলে দিগাংক $\mathbf{B}$ শূন্য হবে: এ ব্যাপার পথ c ও টরোয়ডের বাইরে অন্য যে কোনো পথের জন্য প্রযোজ্য হবে। তাহলে টরোয়ডের বাইরে সর্বত্র দিগাংশ শূন্য হবে। ভিতরে পথ b বরাবর $\mathbf{B}$ মোটামুটিভাবে ধ্রুব থাকে যদি অরীয় দিকে টরোয়ড পাতলা হয়। এভাবে,

$$2\pi\rho B = \mu_0 NI \qquad (৩.৩৯)$$



চিত্র ৩.৬ : I প্রবাহবাহী বর্গ প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট টরোয়ড কুণ্ডলী ভাঙ্গা ভাঙ্গা রেখা দ্বারা প্রদর্শিত চিত্র হলো B এর সংকলের পথ।

এখানে N হলো মোট পাক সংখ্যা এবং ρ হলো পরিবাহীর অভ্যন্তরে ব্যাসার্ধ। সমীকরণ (৩.৩৯) থেকে পাই,

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi\rho} I \qquad (৩.৪০)$$

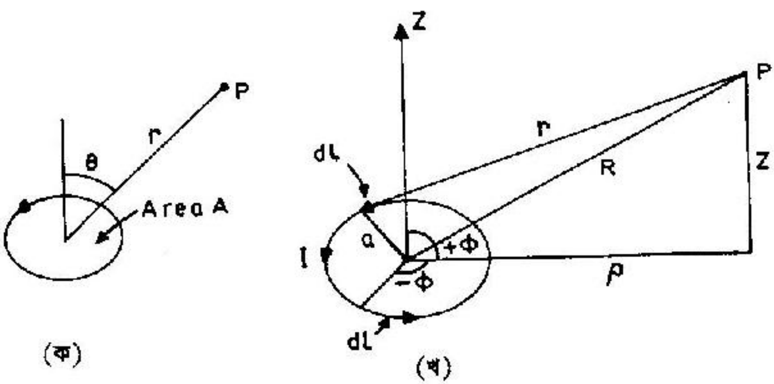
টরোয়ডের বাইরে চৌম্বক আবেশের অদিগাংশ উপাংশ বিদ্যমান। পথ d এর জন্য পথ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল একবার টরোয়ডের পাকের প্রবাহ দ্বারা অতিক্রান্ত হয় এবং টরোয়ডের বাইরের ব্যাসার্ধের চেয়ে বেশি দূরত্বে চৌম্বক আবেশ হবে গড় ব্যাসার্ধের বরাবর একটি পাকের আবেশের সমান। এটি লক্ষ্য করার ব্যাপার যে যদিও টরোয়ডের বাইরে চৌম্বক আবেশ শূন্য কিন্তু ভেক্টর বিভব **A** শূন্য নয়। টরোয়ডের কুণ্ডলীর নিকটে কোনো বিন্দুতে, **A** প্রধানত নিকটস্থ পাকের জন্য হয়ে থাকে। এটি প্রবাহের সমান্তরাল এবং ভিতরে ও বাইরে মোটামুটিভাবে এর মান সমান। সুতরাং যে সকল অঞ্চলে চৌম্বক আবেশ নেই সেখানেই ভেক্টর বিভব **A** বিদ্যমান এর সহজ অর্থ হলো এই যে আমরা একই সময়ে $\mathbf{A} \neq 0$ এবং $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ পেতে পারি যা আপাতদৃষ্টিতে সম্পূর্ণরূপে যুক্তিসঙ্গত বলে মনে হয়।

৩.৬ তারের লুপের জন্য চৌম্বক আবেশ (Magnetic Induction due to a Loop of Wire)

আমরা একটি তারের বৃত্তীয় লুপের (যা I প্রবাহ বহন করে) ক্ষেত্র বিবেচনা করবো। লুপ থেকে দূরে কোনো এক স্থানে, যার দূরত্ব এর ব্যাসার্ধের তুলনায় বেশি। যদি লুপের ক্ষেত্রফল A হয় এবং আমরা লুপের কেন্দ্রে একটি বর্তনীয় স্থানাংক পদ্ধতি স্থাপন করি যাতে লুপের অভিলম্বিক গোলার অক্ষের দিকে হয়। **B** পেতে হলে আমরা সমীকরণ (৩.২৬) প্রয়োগ করবো

লুপ দ্বারা তৈরি ঘন কোণ হবে $A \cos\theta/r^2$, যাতে স্কেলার বিভব হবে

$$V = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad (৩.৪১)$$



চিত্র ৩.৭ : (ক) তারের একটি ক্ষুদ্র লুপের প্রবাহ থেকে স্কেলার বিভব।
(খ) তারের একটি ক্ষুদ্র লুপের প্রবাহ থেকে ভেক্টর বিভব।

এই স্কেলার বিভবের আকার তড়িৎ দ্বিপোলের স্কেলার বিভবের সদৃশ।

যদি ধরি, $IA = m$ এবং প্রবাহের ক্ষুদ্র লুপকে চৌম্বক দ্বিপোল বলি তাহলে স্কেলার বিভব হবে,

$$V = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad (৩.৪২)$$

এই একই সমস্যা আমরা ভেক্টর বিভবের দৃষ্টিকোণ থেকেও পেতে পারি। মনে করি, ক্ষেত্র বিন্দু $\phi = 0$ তে অবস্থিত।

৩.৭খ চিত্রের মতো আমরা অংশসমূহকে $\pm\phi$ তে জোড়া তৈরি করতে পারি। সমীকরণ (৩.৩৮) থেকে P বিন্দুতে A এর লব্ধ অবদান ϕ এর দিকে হবে। এভাবে **A** এর মাত্র একটি উপাংশ $A\phi$ আছে। ধরা যাক ϕ এর দিকে dl এর উপাংশ হলো $dl\phi$ । তাহলে

$$A\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl\phi}{r} \qquad (৩.৪৩)$$

চিত্র ৩.৭খ থেকে আমরা লিখতে পারি $dl\phi = a\cos\phi\, d\phi$ এবং

$r^2 = a^2 + \rho^2 - a\rho\cos\phi + z^2$ । এ থেকে আমরা পাই,

$$A\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{A\cos\phi\, d\phi}{(a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\rho)^{1/2}} \qquad (৩.৪৪)$$

যদি $a << R$, তবে সন্নিকৃষ্টত : (Approximately) হর হবে $(R^2-2a\rho\cos\phi)$ । এখানে $2a\rho << R^2$, এবং আমরা নিম্নোক্ত উপায়ে সম্প্রসারণ করতে পারি

$$\frac{1}{(R^2-2a\rho\cos\phi)^{1/2}} = \frac{1}{R\left(1-\frac{2a\rho}{R^2}\cos\phi\right)^{1/2}}$$

$$\approx \frac{1}{R}\left(1+\frac{a\rho}{R^2}\cos\phi\right) \qquad (৩.৪৫)$$

সমীকরণ (৩.৪৪) থেকে

$$A\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a\cos\phi}{R}\left(1+\frac{a\rho\cos\phi}{R^2}\right)d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{a^2\rho}{R^3}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2\rho}{4R^3}$$

$$= \frac{a^2\mu_0 I\sin\theta}{4R^2} \qquad [\because \quad \rho = R\sin\theta\,] \qquad (৩.৪৬)$$

যদি ধরি $\pi a^2 I = AI = m$

$$A\phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{R^2} \qquad (৩.৪৭)$$

আমরা m কে একটি ভেক্টর বলে গণ্য করতে পারি যার মান উপরে বর্ণিত হয়েছে এবং এর দিক লুপের অভিলম্বিক।

তাহলে সমীকরণ (৩.৪৭) কে লেখা যায়

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}_1}{r^3} \qquad (৩.৪৮)$$

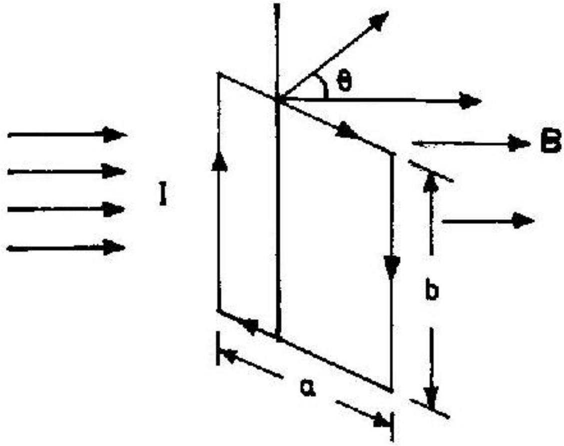
এটি অতি সহজেই দেখানো যায় যে (৩.৪৭) এর কার্ল নিয়ে B এর উপাংশ পাওয়া যায় তা (৩.৪১) এর নতিমাত্রা (gradient) নিয়ে সৃষ্ট উপাংশের সমান।

৩.৭ সুষম চৌম্বক ক্ষেত্রে একটি প্রবাহ লুপে ব্যাবর্তন বল (Torque on a Current Loop in a Uniform Magnetic Field)

আমরা প্রবাহ দ্বারা চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এখন প্রবাহবাহী পরিবাহীর উপর বল সম্বন্ধে দৃষ্টিপাত করবো। আমরা একটি সরল আকারের আয়তাকার লুপ বিবেচনা করবো।

লুপের অক্ষ সুষম চৌম্বক ক্ষেত্রের উপর অভিলম্বিক এবং লুপের অভিলম্বিক ক্ষেত্রের দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে। সুষম ক্ষেত্র B তে লুপের উপর নীট বল শূন্য কিন্তু এর উপর ক্রিয়াশীল একটি ব্যাবর্তন বল আছে। প্রবাহ I লুপের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয়। লুপের উপরের ও তলার বাহুতে সমীকরণ (৩.৮) প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\mathbf{F} = (I\,\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$
$$= I\,ab\sin(\pi/2-\theta)$$
$$= I\,ab\cos\theta \qquad (৩.৪৯)$$



চিত্র ৩.৮ : সুষম চৌম্বক ক্ষেত্রে আয়তাকার লুপ।

ভেক্টর ক্রস গুণনের নিয়ম যখন প্রয়োগ করা হয় তখন এই বল উপরের বাহুতে উর্ধ্বমুখী ও তলার বাহুতে নিম্নমুখী। এ সমস্ত অংশ থেকে দৃঢ় (rigid) লুপের উপর নীট বল শূন্য হবে এবং ব্যাবর্তন বলও শূন্য হবে। একই সমীকরণ খাড়া বাহুদ্বয়ে প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$F = I\,bB$$

যেখানে বলগুলি সমান, বিপরীত এবং বহির্মুখী কিন্তু এদের কুণ্ডলীর প্লেনে অভিলাম্বিক উপাংশ আছে। সুতরাং কুণ্ডলীতে ব্যাবর্তন বল শূন্য নয়।

চিত্র ৩.৯ ব্যবহার করে (যা হলো লুপের নিম্নদিকে তাকালে যে দৃশ্য পাওয়া যায়) মোট ব্যাবর্তন বলের জন্য আমরা পাই,

$$\tau = Iab\,B\sin\theta$$

$$= IBA\sin\theta \qquad (৩.৫০)$$

যেখানে A হলো লুপের ক্ষেত্রফল ab। লুপে যদি N পাক থাকে তবে সমীকরণটি হবে

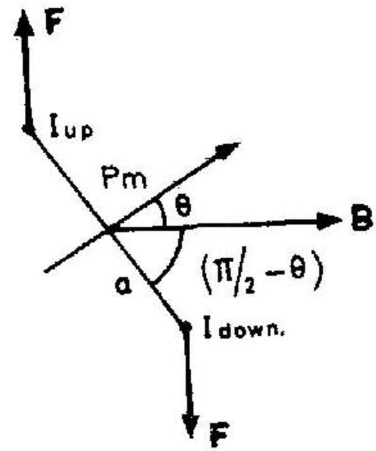
$$\tau = NIAB\sin\theta \qquad (৩.৫১)$$

আমরা যদি ধরি $\quad P_m = NIA$

তাহলে $\quad \tau = P_m B\sin\theta \qquad (৩.৫২)$

যেখানে P_m হলো চৌম্বক দ্বিপোল মোমেন্ট। ভেক্টর ব্যবহার করে লেখা যায়

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \qquad (৩.৫৩)$$



চিত্র ৩.৯ : একটি সুষম চৌম্বক ক্ষেত্রে আয়তাকার প্রবাহ লুপের দৃশ্য। লুপের প্লেনের উপর অভিলম্বিক চৌম্বক ক্ষেত্রের সাথে θ কোণ তৈরি করে।

ব্যবর্তন বল ভেক্টরের দিক হবে ঘূর্ণনের অক্ষ বরাবর। $\mathbf{P}_m$ এর দিক হবে প্রবাহ লুপের প্লেনের অভিলাম্বিক।

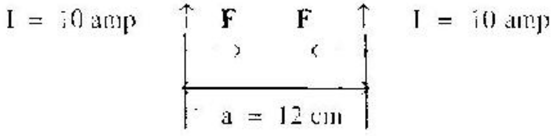
সমাধানকৃত সমস্যাবলী
(Solved Problems)

সমস্যাবলী (Problems)

১। দুটি লম্বা সমান্তরাল তারের মধ্যে দূরত্ব 12cm এবং এরা প্রত্যেকেই একই দিকে 10 amp প্রবাহ বহন করে। তারদ্বয়ের মধ্যে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে বল নির্ণয় কর।

(Two long parallel wires are seperated by a distance 12cm and each carrying 10 amp current in the same direction. Calculate the force per unit length between the wires.)

সমাধান



প্রতি একক দৈর্ঘ্যে বল

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I I}{2\pi a}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10}{2\pi \times 0.12}$$

$$= 16.6 \times 10^{-5}$$ নিউটন/মিটার

২। একটি সলিনয়েডের দৈর্ঘ্য 25cm এবং ব্যাসার্ধ 1.5cm। এটি 4000 পাক তার দ্বারা সুষমভাবে জড়ানো। যদি 3 amp প্রবাহ কুণ্ডলীর মধ্যে দিয়ে প্রবাহিত হয় তবে সলিনয়ডের অক্ষে মাঝখানে চৌম্বক ক্ষেত্র নির্ণয় কর।

(A solenoid of 25cm long and radius of 1.5cm is uniformly wound with 4000 turns of wire. If 3 amp current flow through the coil then find out the magnetic field at the middle along the axis of the solenoid).

সমাধান

চৌম্বক ক্ষেত্র

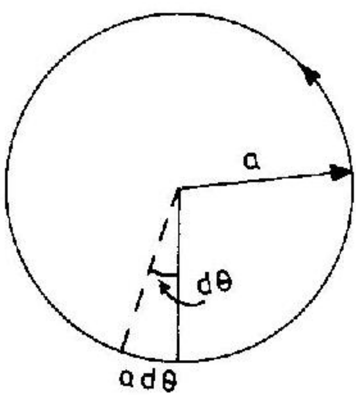
$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4000 \times 3}{0.25}$$

$$= 0.06$$ ওয়েবার/মি²

৩। একটি বৃত্তাকার লুপের কেন্দ্রে চুম্বকীয় ফ্লাক্স ঘনত্বের রাশি বের কর।

(Find out an expression for the magnetic flux density at the centre of a circular loop).



চিত্র : ১ প্রবাহব্যাপী একটি বৃত্তাকার লুপ।

সমাধান

উপরের চিত্র থেকে আমরা লিখতে পারি

$$d\mathbf{l} = a\,d\theta\,\theta_0$$

এখানে θ_0 হলো θ এর দিকে একটি ভেক্টর। যেহেতু θ_0 এবং $\mathbf{r}_0$ (একক ভেক্টর) পথ বরাবর সকল বিন্দুতে একে অপরের উপর লম্ব, অতএব সমীকরণ (৩.৭) নিম্নরূপে হ্রাসপ্রাপ্ত হবে

$$\mathbf{B} = (\theta_0 \times \mathbf{r}_0)\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{a\,d\theta}{a^2} = (\theta_0 \times \mathbf{r}_0)\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a}\,\mathbf{h}$$

$\mathbf{h} = \theta_0 \times \mathbf{r}_0$ একক ভেক্টর অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে কারণ এখানে চুম্বকীয় ক্ষেত্রের দিক কাগজের তল থেকে উপরের দিকে।

৪। একটি প্রবাহ লুপ এর ব্যাসার্ধ যদি 30mm হয় এবং এতে 10 amp প্রবাহ থাকে তবে চুম্বকীয় ফ্লাক্স ঘনত্ব বের কর। (ক) লুপের কেন্দ্রে (খ) লুপের কেন্দ্র থেকে h অক্ষের উপর 5cm দূরত্বে (চিত্র ৩.৩)।

(If the radius of a current loop is 30mm and carries 10 amp current then find the magnetic flux densities : (a) at the centre of the loop (b) from the centre of the loop at a distance of 5cm on the h-axis. (Fig. 3.3).

সমাধান

(ক) লুপের কেন্দ্রে $h = 0$ সমীকরণ (৩.১২) থেকে পাই

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2 \times 0.03} = 20.93 \times 10^{-5} \text{ ওয়েবার/মি}^2$$

(খ) এক্ষেত্রে $h^2 >> a^2$ । অতএব সমীকরণ (৩.১২) থেকে পাই

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2h^3}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (0.03)^2}{2 \times (0.05)^3}$$

$$= 1.36 \times 10^{-7} \text{ ওয়েবার/মি}^2$$

৫। একটি বর্গাকৃতি প্রবাহ লুপে 250 পাক ফিলামেন্টারি তার আছে এবং তারটিকে একটি সুষম চুম্বকীয় ক্ষেত্রে স্থাপন করা হলো যার মান 6 ওয়েবার/মি^{2}। লুপের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 100mm এবং এতে 12amp প্রবাহ প্রবাহিত হয়। (ক) লুপের চুম্বকীয় মোমেন্ট বের কর। (খ) লুপে সর্বাধিক ব্যাবর্তন বল কত?

(A square current loop having 250 turns filamentary wire and is being placed in a uniform magnetic field of 6 wb/m^2. Each side of the loop is 100mm long and carries 12 amp current. (a) Find out the magnetic moment of the loop. (b) What is the maximum torque on the loop ?)

সমাধান

(ক) চুম্বকীয় মোমেন্ট $p_m = NIA$

$$= 250 \times 12 \times (0.1)^2$$
$$= 30.00\ (Am^2)$$

(খ) সমীকরণ (৩.৫৩) থেকে এটি স্পষ্ট যে ব্যাবর্তন বলের মান সর্বাধিক হবে তখনই যখন লুপটি চুম্বকীয় ক্ষেত্রের সমান্তরাল হবে। সুতরাং সর্বাধিক ব্যাবর্তন বল হবে

$$\tau = p_m B = 30 \times 6$$
$$= 180 \text{ নিউটন–মিটার।}$$

প্রশ্নমালা

১। লম্বা দুটি সমান্তরাল তারের মধ্যে দূরত্ব 15cm এবং প্রতিটি তার একই দিকে 12amp প্রবাহ বহন করে। তারদ্বয়ের মধ্যে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে বল বের কর।

(The distance between two long parallel wires is 15cm and each wire carries 12amp current in the same direction. Find out the force per unit length between the wires.)

২। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সোজা প্রবাহ ফিলামেন্টের সংলগ্ন এলাকায় চৌম্বক ক্ষেত্র নির্ণয় কর।

(Find out the magnetic field in the vicinity of a straight current filament of fixed length.)

৩। বায়োট–সাভার্ট সূত্র ব্যবহার করে I প্রবাহবাহী একটি বর্গাকার প্রবাহ লুপের কেন্দ্রে চৌম্বক আবেশ **B** বের কর।

(Using biot-Savart law, find out the magnetic induction **B** at the centre of a square loop carrying current I.)

৪। সহঅক্ষীয় দুটি বৃত্তাকার কুণ্ডলীর মধ্যে দূরত্ব b এবং এটি N সংখ্যক পাক (যার ব্যাসার্ধ a) দ্বারা নিবিড়ভাবে জড়ানো প্রতিটি কুণ্ডলীতে I প্রবাহ থাকলে কুণ্ডলী দুটির মধ্যেকার বল নির্ণয় কর

(Two circular coils of N closely wound turns radius 'a' are coaxial and are separated by a distance b. Find out the force between the two coils when a current I passes through each coil.)

৫। একটি লম্বা সোজা পরিবাহী I প্রবাহ বহন করে এবং এর বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদ হলো R। পরিবাহীর অভ্যন্তরে a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বেলনাকার ছিদ্র আছে যার অক্ষ পরিবাহীর অক্ষের সমান্তরাল এবং এটি থেকে b দূরত্বে অবস্থিত। দেখাও যে ছিদ্রের অভ্যন্তরে চৌম্বক আবেশ সুষম এবং এর মান

$$\frac{\mu_0 bI}{2\pi (R^2 - a^2)}$$

A straight long wire carries current I and its circular cross section is R. There is a cylindrical hole of radius 'a' inside the conductor whose axis is parallel to axis of the conductor and is situated at a distance h from it. Show that the magnetic induction inside the hole is uniform and has a magnitude)

$$\frac{\mu_0 bI}{2\pi\,(R^2 - a^2)}$$

৩। যদি একটি ফিলামেন্টারি প্রবাহ লুপের (চিত্র ৩.৩) ব্যাসার্ধ 70 mm হয় এবং এতে 10 amp প্রবাহ থাকে তবে আয়তাকার স্থানাংক ব্যবস্থার উৎস বিন্দু থেকে b অক্ষের উপর 3 meter দূরত্বে চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্বের মান নির্ণয় কর।

(If the radius of the filamentary current loop of fig 3.3 is 70 mm and the current in the filamentary wire is 10 amp, calculate the magnitude of the magnetic flux density at a distance of 3m on the b axis from the origin of the rectangular coordinate system.)

৪। একটি বর্গাকার লুপে 150 পাক আছে এবং একে একটি সুষম ফ্লাক্স ঘনত্ব 5 ওয়েবার/মি² এ স্থাপন করা হলো। লুপের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 15 cm এবং এটি 10 amp প্রবাহ বহন করে।

ক. লুপে সর্বাধিক ব্যবর্তন বল কত?

খ. লুপে চৌম্বক মোমেন্ট কত?

(A square loop of 150 turns is placed in a field of uniform flux density 5 wb/m². The loop is 15cm on a side and carries a current of 10 amp.

a. What is the maximum torque on the loop ?

b. What is the magnetic moment of the loop ?)

৫। একটি ছোট কুণ্ডলীর চৌম্বক মোমেন্ট 10^{-3} amp-meter² এবং এটি প্রতি মিটারে 500 পাকবিশিষ্ট একটি বায়ু পূর্ণ লম্বা সলিনয়েডের কেন্দ্রের নিকট অবস্থিত যার মধ্যে 2 amp প্রবাহ আছে, কুণ্ডলীতে সর্বাধিক ব্যাবর্তন বল কত?

(A small coil of magnetic moment 10^{-3} amp – m² situated near the centre of a long air-field solenoid of 500 turns/meter with current of 2 amp. What is the maximum torque on the coil ?)

৬। একটি সলিনয়েডের দৈর্ঘ্য 30cm এবং ব্যাসার্ধ 1.5cm এবং জড়ানো পাকের সংখ্যা 1000। সলিনয়েডটিকে একটি সুষম চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্ব 5 ওয়েবার/মি² এ স্থাপন করে এর তারের মধ্যে দিয়ে 10 amp প্রবাহিত করা হলো।

ক. সলিনয়েডে সর্বাধিক বল কত?

খ. সলিনয়েডে সর্বাধিক ব্যাবর্তন বল কত?

(A Solenoid 30 cm long and 1.5 cm in radius has a uniform winding of 1000 turns. The Solenoid is placed in a uniform field of 5wb/meter² flux density and a current of 10 amp is passed through the solenoid winding. What is the maximum

(a) force on the solenoid ; (b) torque on the solenoid ?)

১০। 15 পাকবিশিষ্ট একটি কুণ্ডলীর ক্ষেত্রফল $144 cm^2$ এবং এতে 1 amp প্রবাহ প্রবাহিত হয়। কুণ্ডলীতে চৌম্বক মোমেন্ট কত?

(A coil of 15 turns and area of $144\ cm^2$ carries a current of 1 amp. What is the magnetic moment of the coil ?)

১১। একটি অপরিবাহী বৃত্তাকার চাকতির (disc) ব্যাসার্ধ a এবং এতে সুষমভাবে বন্টিত স্থির চার্জ আছে σ কুলম্ব/মি^{2}। চাকতিটি এর কেন্দ্রের দিকে ω কৌণিক বেগে ঘুরে। এর কেন্দ্রে চৌম্বক ক্ষেত্র বের কর।

(An insulating circular disc of radius 'a' has a uniformly distributed static charge of σ coul/m^2. The disk rotates about it centre with an angular velocity ω. Find the magnetic field at its centre.)

১২। একটি প্রোটন ও একটি ইলেকট্রন নিয়ে একটি হাইড্রোজেন পরমাণু গঠিত। প্রোটন ও ইলেকট্রনের মধ্যে দূরত্ব 0.5×10^{-10} meter। মনে করি, ইলেকট্রন প্রোটনের চারদিক দিয়ে 10^{13}Hz কম্পনে ঘোরে; চলমান ইলেকট্রনের জন্য নিউক্লিয়াসে চৌম্বক ক্ষেত্র বের কর।

(A hydrogen atom consists of a proton and an electron separated by a distance of 0.5×10^{-10} meter. Assuming that the electron moves in a circular orbit around the proton with a frequency of 10^{13} Hz, find the magnetic field at the nucleus due to the moving electron.)

১৩। একটি অনন্ত লম্বা বেলনের ব্যাসার্ধ r এবং এটি মোট I প্রবাহ বহন করে। অ্যাম্পিয়ারের বর্তনী সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে বেলনের অক্ষ থেকে x দূরত্বে চৌম্বক ক্ষেত্র হবে।

$$B\phi = \frac{\mu_0 I_x}{2\pi r^2} \qquad \text{যেখানে } x \le r$$

$$B\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \text{যেখানে } x \ge r$$

(An infinitely long cylinder of radius 'r' carries a total current I. Using Ampere's circuital law show that the magnetic field at a distance x from the axis of the cylinder is given by)

$$B\phi = \frac{\mu_0 I_x}{2\pi r^2} \qquad \text{for } x \le r$$

$$B\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \text{for } x \ge r$$

১৪। একটি পেপার টরোইডের ব্যাসার্ধ 100 mm এবং বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ 10mm। এটি 5000 পাকবিশিষ্ট ফিলামেন্টারি তার (যা 10 amp প্রবাহ বহন করে) দ্বারা জড়ানো। টরোইডের অক্ষ বরাবর চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্ব নির্ণয় কর।

(A paper toroid has the dimensions of 100 mm mean radius and 10 mm radius of a circular cross-section and is wound with 5000 turns of filamentary wire carrying current 10amp. Calculate the magnitude of the magnetic flux density along the axis of the toroid.)

১৫। একটি বৃত্তাকার কুণ্ডলীর ব্যাসার্ধ 10cm এবং এর অক্ষ সুষম চৌম্বক ক্ষেত্রের সাথে θ কোণ তৈরি করেছে। কুণ্ডলীতে 30 পাক আছে এবং এটি 10amp প্রবাহ বহন করে। কুণ্ডলীতে ব্যাবর্তন বল বের কর।

(The axis of a circular coil of radius 10 cm makes an angle θ with a uniform field B. The coil has 30 turns and carries a current of 10 amp. Find the torque on the coil.)

চতুর্থ অধ্যায়

তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশ

(Electromagnetic Induction)

৪.১ সূচনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়সমূহে স্থির তড়িৎ ও চুম্বক ক্ষেত্রের নীতিসমূহ আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অধ্যায়ে সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ও চুম্বক ক্ষেত্র সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে এবং কিছু নতুন সম্পর্ক ও ধারণার বিবরণ দেয়া হবে। এদের মধ্যে অন্যতম হলো ফ্যারাডের সূত্র, যা একটি আবদ্ধ বর্তনীতে সংযুক্ত চুম্বক ফ্লাক্স এর পরিবর্তনের দরুন এতে আবিষ্ট তড়িৎ চালক বল (Induced Electromotive Force) সৃষ্টি হয়।

ফ্যারাডের সূত্র সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল তড়িৎ চুম্বকীয় ঘটনাবলীতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এটি তড়িৎ পরিবর্তন এবং আবিষ্ট তড়িৎ চালক শক্তির মধ্যে সমানুপাতিক গুণাঙ্ক নির্ণয় করে, আবার দুটি বর্তনীর মধ্যেকার পারস্পরিক আবেশের সহগ এবং একটি একক বর্তনীর স্বাবেশ (self inductance) নির্ণয় করে। পরিশেষে চুম্বক ক্ষেত্রে শক্তি সঞ্চয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

৪.২ ফ্যারাডের আবেশ সূত্র (Faraday's law of Induction)

সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ও চুম্বক ক্ষেত্র একে অপরের উপর নির্ভরশীল। এ ধরনের নির্ভরশীলতার কারণে সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ও চুম্বক ক্ষেত্রকে তড়িৎ চৌম্বক ক্ষেত্র (Electromagnetic field) বলে। ফ্যারাডে পরীক্ষা-নিরীক্ষা দ্বারা আবিষ্কার করেন যে যদি পরিবাহী তারের আবদ্ধ বর্তনীতে চুম্বকীয় ফ্লাক্স পরিবর্তন করা হয় তবে বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহের সৃষ্টি হয়। তড়িৎ ক্ষেত্র দ্বারা এ ধরনের তড়িৎ প্রবাহের সৃষ্টি হয় যা পরিবর্তনশীল চুম্বক ক্ষেত্র তৈরি করে

আমরা ২.১৬ অনুচ্ছেদে দেখেছি যে স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র সংরক্ষণশীল

অর্থাৎ
$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = 0 \qquad (৪.১)$$

এখানে $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l}$ হলো বর্তনীতে আবিষ্ট তড়িৎ চালক বল। এভাবে যখন কোনো আধান একটি আবদ্ধ পথে চলাচল করে তখন স্থির তড়িৎ বল দ্বারা সম্পন্ন কাজের মান শূন্য হয়। পথটি যদি পরিবর্তনশীল চুম্বক ফ্লাক্স দ্বারা সংশ্লিষ্ট হয় তবে সমীকরণ (৪.১) প্রয়োগযোগ্য হবে না।

আমরা এখন লুপের আকারের একটি সরল পথ বিবেচনা করবো। যদি লুপের সাথে সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স ϕ হয় তবে

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (৪.২)$$

এটিই হলো ফ্যারাডের আবেশ সূত্র। অর্থাৎ কোনো কুণ্ডলীর সাথে সংশ্লিষ্ট চুম্বক ফ্লাক্সের পরিবর্তন হলে ঐ কুণ্ডলীতে একটি তাৎক্ষণিক তড়িৎ চালক বল (e.m.f) আবিষ্ট হয় এবং যে কোনো মুহূর্তে আবিষ্ট তড়িৎ চালক বলের মান ফ্লাক্স পরিবর্তনের হারের সমানুপাতিক।

আবিষ্ট তড়িৎ চালক বলকে ঐ বর্তনীর রোধ দ্বারা ভাগ করলে বর্তনীতে প্রবাহিত তড়িৎ এর মান পাওয়া যায়। আবদ্ধ বর্তনী $\int_S \mathbf{B}.\mathbf{da}$ দ্বারা বদ্ধ s তল ব্যাপী চুম্বকীয় ক্ষেত্র প্রাবল্যের পৃষ্ঠ সংকল হবে বর্তনীর চুম্বকীয় ফ্লাক্স।

সমীকরণ (৪.২) কে লেখা যায়

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}.\mathbf{da} \qquad (৪.৩)$$

এটি ফ্যারাডের আবেশ সূত্রের ভিন্নরূপ।

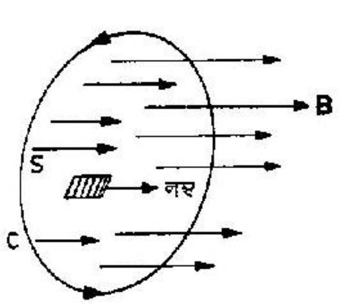
যেহেতু আবদ্ধ বর্তনীর চুম্বকীয় ফ্লাক্সের পরিবর্তন দুই প্রকারে ঘটতে পারে :

(১) একটি নির্দিষ্ট লুপ দ্বারা আবদ্ধ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের সময়ের সাথে পরিবর্তন হওয়া থেকে বা

(২) একটি স্থির চুম্বকীয় ক্ষেত্রে সময়ের সাথে বর্তনীর গতিশীল হওয়া থেকে অথবা (১) ও (২) উভয়ের যোগফল দ্বারা, সেহেতু সমীকরণ (৪.৩) এর ডান পাশের সময় সিদ্ধ (Time-derivative) সমস্ত সংকলের উপর ক্রিয়াশীল হয়। একটি পরিবাহী তারে আবিষ্ট তড়িৎ চালক শক্তি তৈরির জন্য উক্ত তার দ্বারা গঠিত বর্তনীর আবদ্ধ হওয়ার কোনো প্রয়োজনীয়তা নেই।

সমীকরণ (৪.২) ও (৪.৩) এর ডান পাশের ঋণাত্মক চিহ্ন বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। এটি অতি পরিচিত যে পৃষ্ঠের যে কোনো বিন্দুতে লম্ব পৃষ্ঠের দুই দিকের যে কোনো দিক নির্দেশ করতে পারে। সমীকরণ (৪.৩) লিখতে যে সব ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পৃষ্ঠ দ্বারা S পৃষ্ঠ গঠিত তাদের উপর লম্বসমূহ এমনভাবে নেয়া হয়েছে যে, যখন একে বর্তনী C এর পছন্দকৃত দিকের চারদিকে ঘুরানো হয় তখন ডানহাতি স্ক্রুর অগ্রসরের দিকে নির্দেশিত হয়।

মনে করি পৃষ্ঠ S একটি সমতল যা সুষম চুম্বকীয় ক্ষেত্র B এর উপর লম্ব। এই পছন্দ অনুসারে S পৃষ্ঠের সংশ্লিষ্ট চুম্বকীয় ফ্লাক্স ধনাত্মক হবে।



চিত্র ৪.১ : সুষম চুম্বকীয় ক্ষেত্র B সমতল পৃষ্ঠ S এর উপর লম্ব।

এখন যদি চুম্বকীয় ফ্লাক্স ϕ সময়ের সাথে বৃদ্ধি পায় তবে $\frac{d\phi}{dt}$ ঋণাত্মক হবে। এরূপে বর্ধনশীল চুম্বকীয় ফ্লাক্স একটি তড়িৎ ক্ষেত্র আবিষ্ট করে যা সমোন্নতি রেখা (contour) C এর পছন্দকৃত দিকের বিপরীত দিকে কাজ করে। ফলে যদি একটি পরীক্ষামূলক আধান C এর যে কোনো বিন্দুতে অবস্থিত থাকে তবে এটি C এর দিকের বিপরীতে কাজ করে।

এভাবে সৃষ্ট প্রবাহ S পৃষ্ঠের লম্বের বিপরীত দিকে একটি চুম্বকীয় ক্ষেত্র তৈরি করে। তাহলে দেখা যায় যে একটি বর্ধনশীল চুম্বকীয় ফ্লাক্স একটি প্রবাহ আবিষ্ট করে যা মূল ফ্লাক্স বৃদ্ধির বিপরীত দিকের চুম্বকীয় ফ্লাক্স সৃষ্টি করে। একইভাবে যদি একটি চুম্বকীয় ফ্লাক্স ϕ সময়ের সাথে হ্রাস পেতে থাকে তবে $\frac{d\phi}{dt}$ ঋণাত্মক হবে এবং $-\frac{d\phi}{dt}$ ধনাত্মক হবে। ফলে

$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l}$ ধনাত্মক হবে। অতএব হ্রাসপ্রাপ্ত চুম্বকীয় ফ্লাক্স একটি তড়িৎ ক্ষেত্র সৃষ্টি করে যা সমোন্নতি রেখা C এর দিকে কাজ করে যেন C যদি পরিবাহিতার দ্বারা তৈরি হয় তবে প্রবাহ C এর একই দিকে প্রবাহিত হবে।

সমীকরণ (৪.২) বা (8.৩) এর ডান পাশের ঋণাত্মক চিহ্ন তাহলে আবিষ্ট তড়িৎ চালক শক্তির মেরু নির্ণয় করবে, যেন যে চুম্বকীয় ফ্লাক্স একে সৃষ্টি করে তাকেই এটি বাধা দেয়। এই ঘটনাই হলো লেঞ্জের নিয়ম (Lenz's Law)। এ নিয়ম শক্তির সংরক্ষণের নিয়মের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

8.৩ ফ্যারাডের সূত্রের ব্যবকলনী আকার (Differential Form of Faraday's Law)

পূর্বোক্ত অনুচ্ছেদে আমরা বলেছি যে একটি আবদ্ধ বর্তনীতে চুম্বকীয় ফ্লাক্স পরিবর্তন দুটি কারণে হতে পারে : (১) সময়ের সাথে চুম্বকীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য পরিবর্তন এবং (২) চুম্বকীয় ক্ষেত্রে আবদ্ধ বর্তনীর গতিশীলতা। মনে করি বর্তনী C এবং এ দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠ S স্থির আছে এবং ধরি যে চুম্বকীয় ক্ষেত্র $\mathbf{B}$ সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল। তাহলে আমরা সমীকরণ (8.৩) হতে পাই,

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} \qquad (8.8)$$

আমরা $\mathbf{B}$ এর আংশিক সিদ্ধ (partial derivative) ব্যবহার করেছি কারণ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে $\mathbf{B}$ এর পরিবর্তনের হার প্রয়োজন।

স্ট্রোক এর মতবাদ ব্যবহার করে পাই,

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} \qquad (8.৫)$$

সমীকরণ (8.8) ও (8.৫) হতে লেখা যায়,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} \qquad (8.৬)$$

যেহেতু উপরিউক্ত সমীকরণ যে কোনো পৃষ্ঠের জন্য প্রয়োগযোগ্য, কাজেই প্রত্যেক বিন্দুতে সংকল্য (integrands) অবশ্যই সমান হবে। এভাবে পাই,

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (8.৭)$$

এটিই হলো ফ্যারাডের আবেশ সূত্রের ব্যবকলনী আকার। এটি ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সূত্র। এ সমীকরণ হতে E এর মান পাওয়া যাবে না যতক্ষণ পর্যন্ত না একে সংকলিত করা হয়।

8.8 ভেক্টর বিভব A এর প্রেক্ষিতে আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র (Induced Electric Field in terms of the Vector Potential A)

পরিবর্তনশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্র দ্বারা আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য $\mathbf{E}$ ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ এর সাথে সম্পর্কিত। যেহেতু

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

অতএব সমীকরণ (8.৭) হতে পাওয়া যায়

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$
$$= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

বা $$\nabla \times \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (৪.৮)$$

আমরা জানি যদি একটি ভেক্টরের কার্ল শূন্য হয় তবে একে একটি স্কেলার ফাংশনের ঢাল (gradient) হিসেবে প্রকাশ করা যায়। তাহলে সমীকরণ (৪.৮) হতে লেখা যায়,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla v \qquad (৪.৯)$$

স্থিতি প্রবাহের জন্য A একটি ধ্রুব এবং সমীকরণ (৪.৯) হ্রাস প্রাপ্ত হয়ে দাঁড়ায়,

$$\mathbf{E} = -\nabla v$$

এখানে v হলো তড়িৎ বিভব, যাকে স্কেলার বিভবও বলা হয়। সমীকরণ (৪.৯) হলো E এর সাধারণ প্রকাশ। এই সমীকরণ বর্ণনা করে যে তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্যের সৃষ্টি হতে পারে : (১) $-\nabla v$ পদের মাধ্যমে আধান পুঞ্জীভুত হয়ে বা (২) $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ পদের মাধ্যমে পরিবর্তনশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্র হতে।

সমীকরণ (৪.৮) নিম্নরূপে পাওয়া যেতে পারে। ফ্যারাডের আবেশ সূত্র অনুযায়ী, যে কোনো পথের জন্য আবিষ্ট তড়িৎ চালক বল (e.m.f) হবে

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -\frac{d}{dt}\oint \mathbf{A}.d\mathbf{l} \qquad (৪.১০)$$

[যেহেতু $\phi = \oint \mathbf{A}.d\mathbf{l}$]

ডান পাশের ব্যবকলন ও সংকলন এর ক্রম পরিবর্তন করে লেখা যায়,

$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).d\mathbf{l} = 0 \qquad (৪.১১)$$

(যেহেতু নির্দিষ্ট পথ বিবেচনা করা হয়েছে)

আমরা সংকলের চিহ্নের আওতায় আংশিক সিদ্ধ ব্যবহার করেছি, কারণ পথিমধ্যে একটি দেয় বিন্দুতে A এর সময় সিদ্ধ (Time-derivative) দরকার। এভাবে S পৃষ্ঠ আবদ্ধকারী যে কোনো নির্দিষ্ট বক্র (curve) ব্যাপী পাওয়া যায়,

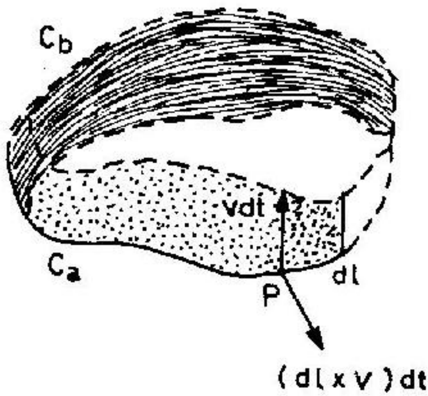
$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).d\mathbf{a}$$
$$= 0 \qquad (৪.১২)$$

সুতরাং ডান পাশের সংকল্য (integrand) শূন্য হবে।

৪.৫ একটি চলমান পদ্ধতিতে আবিষ্ট তড়িৎ চালক বল (Induced Electromotive Force in a Moving System).

ফ্যারাডের সূত্রের ব্যবকলনী আকার (সমীকরণ ৪.৭) শুধু স্থির পদ্ধতিতেই সীমাবদ্ধ থাকে। সুতরাং একটি আবদ্ধ বর্তনীতে (যা সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্র B তে

গতিশীল) ব্যবকলনী আকারে ফ্যারাডের সূত্রের সাধারণ প্রকাশ বা রাশি বের করা খুবই স্বাভাবিক ব্যাপার। আগেই উল্লেখ করা হয়েছে (অনুচ্ছেদ ৪.২) যে যদি একটি পরিবাহী আবদ্ধ বর্তনী সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্র **B** তে চলমান থাকে তবে চুম্বকীয় ক্ষেত্র পরিবর্তনের দ্বারা বর্তনীতে আবিষ্ট ই. এম. এফ ছাড়াও একটি অতিরিক্ত ই. এম. এফ. চুম্বকীয় শক্তির প্রেক্ষিতে বর্তনীতে পরিলক্ষিত গতি দ্বারা সৃষ্টি হয়। এই শেষোক্ত ই. এম. এফ. কে বলা হয় গতিশীল ই. এম. এফ এবং এটি লরেনৎস-এর শক্তি সমীকরণ অনুসারে বর্তনীতে আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র হতে উৎপন্ন হয়। আমরা এখন ফ্যারাডের সূত্রের সংকলন আকারে ফিরে যাই (সমীকরণ ৪.২) এবং একটি পথ C (যা ইচ্ছানুযায়ী dt সময়ে Ca হতে Cb পর্যন্ত স্থানান্তরিত হয়, চিত্র ৪.২ দ্রষ্টব্য) দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠের মাধ্যমে চুম্বকীয় ফ্লাক্সের পরিবর্তনের হার বিবেচনা করি।



চিত্র ৪.২ : একটি সংকলন পথ dt সময়ে Ca হতে Cb পর্যন্ত সরে যায়। ধরে নেয়া হয়েছে যে বিন্দু v বেগে একটি এলাকায় সরে যায় যেখানে চুম্বকীয় আবেশ **B**।

পথ C এর উপরে দেয় বিন্দু P একটি অঞ্চলের (যেখানে চুম্বকীয় আবেশ সময় ও স্থানাঙ্কের উপর নির্ভরশীল) মধ্য দিয়ে **V** বেগে গতিশীল হয়। বর্তনীর মধ্য দিয়ে চুম্বকীয় ফ্লাক্স ϕ পরিবর্তনের হার হবে

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\int_{sb} \mathbf{B}_b (t + dt).\, d\mathbf{a}_b - \int_{sa} \mathbf{B}_a (t).\, d\mathbf{a}_a}{dt} \qquad (৪.১৩)$$

এখানে $B_b(t + dt)$ হলো $(t + dt)$ সময়ে C_b দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠ Sb এর উপর চুম্বকীয় আবেশ। একইভাবে $B_a(t)$ হলো t সময়ে Ca দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠ Sa এর উপরে চুম্বকীয় আবেশ।

t হতে t + dt সময়ব্যাপী τ আয়তন হতে অতিক্রান্ত t + td সময়ে বহির্গামী চুম্বকীয় ফ্লাক্স হবে,

$$\int_{sb} \mathbf{B}_b(t + dt).\, da_b - \int_{sa} \mathbf{B}_a(t + dt).da_a + dt \int_{Ca} \mathbf{B}(t + dt).\,(\mathbf{dl} \times \mathbf{V})$$

$$= \int_{\tau} \nabla.\mathbf{B}(t + dt)\, d\tau$$

$$= 0 \qquad (৪.১৪)$$

কারণ B এর অপসারিতা সব সময়ই শূন্য। সংকল পথ Ca বরাবর চুম্বকীয় আবেশের জন্য Subscript ছাড়াই B ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন Sa পৃষ্ঠে,

$$\mathbf{B}_a(t + dt).\, da_a = \mathbf{B}_a(t).\, da_a + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_a.da_a)\, dt \qquad (৪.১৫)$$

এখানে t সময়ে সময়–সিদ্ধ মূল্যায়িত হয়েছে।

স্টোকস এর মতবাদ হতে আমরা পাই,

$$\oint_{c} \mathbf{B}(t + dt).\,(\mathbf{dl} \times \mathbf{V}) = \oint_{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}(t + dt)].\, \mathbf{dl}$$

$$= \int_{sa} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, da_a \qquad (৪.১৬)$$

সমীকরণ (৪.১৫) ও (৪.১৬) কে (৪.১৪) তে বসিয়ে পাই,

$$\int_{sb} \mathbf{B}_b(t + dt).\, da_b - \int_{sa} \mathbf{B}_a(t).\, da_a - dt \int_{sa} \frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t}.\, da_a$$

$$+ dt \int_{sb} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, da_a = 0 \qquad (৪.১৭)$$

এবং চূড়ান্তভাবে পাওয়া যায়

$$\frac{d\phi}{dt} = -\int_{s} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, da + \int_{s} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, da \qquad (৪.১৮)$$

S এর Subscript এখন অপ্রয়োজনীয়, কারণ আমরা সত্যিকার অর্থে $\Delta t \to 0$ সীমায় $\Delta\phi/\Delta t$ কষন করেছি। উপরের সমীকরণে প্রথম পদটি হলো গতিশীল পথ দ্বারা চিহ্নিত আয়তনের প্রান্তসমূহের মাধ্যমে অর্জিত ফ্লাক্স এবং দ্বিতীয় পদটি হলো সময়ের সাথে B এর পরিবর্তন দ্বারা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফ্লাক্স।

এভাবে ফ্যারাডের আবেশ সূত্র হতে পাওয়া যায়,

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = \int_{s} \left[\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right].\, da \qquad (৪.১৯)$$

অথবা স্টোকস এর মতবাদ ব্যবহার করে পাই,

$$\int_{s} (\nabla \times \mathbf{E}).\, da = \int_{s} \left[\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right].\, da \qquad (৪.২০)$$

যেহেতু এ সমীকরণ যে কোনো বক্র C দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো পৃষ্ঠ S এর জন্য কার্যকর, কাজেই প্রত্যেক বিন্দুতে সংকল্য সমান হবে , এবং

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \qquad (৪.২১)$$

এখানে আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য $\mathbf{E}$ মাপা হয়েছে একটি স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে এবং চুম্বকীয় আবেশ $\mathbf{B}$ মাপা হয়েছে অন্য একটি পদ্ধতিতে। উদাহরণস্বরূপ, যদি $\mathbf{E}$ একটি গতিশীল পরিবাহীতে আবিষ্ট হয় তবে ল্যাবরেটরির প্রেক্ষিতে পরিবাহীর বেগ $\mathbf{V}$ এবং $\mathbf{B}$ মাপা হয়েছে এমন একটি যন্ত্র দ্বারা যা ল্যাবরেটরির প্রেক্ষিতে নির্দিষ্ট রাখা হয়েছে।

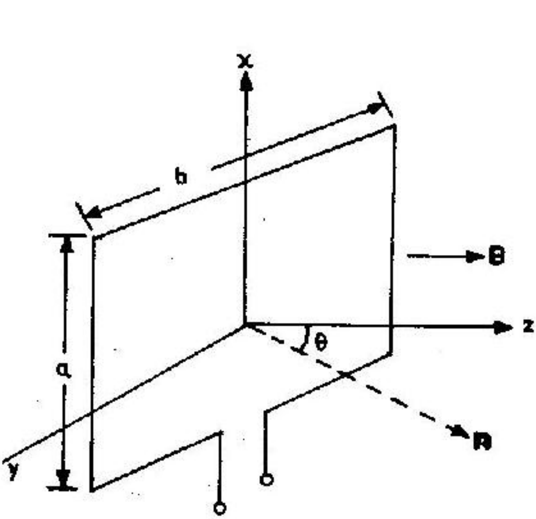
৪.৬ সময় নির্ভরশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট লুপ (Fixed loop in a Time-dependent Magnetic Field).

একটি একক পাকবিশিষ্ট চতুর্ভুজ কুণ্ডলী বিবেচনা করি যার বাহুগুলি 'a' ও 'b' মিটার লম্বা এবং একে Z অক্ষ বরাবর একটি সুষম চুম্বক ক্ষেত্রে স্থাপন করা হয়েছে। মনে করি কুণ্ডলীর তল Z অক্ষের সাথে θ কোণ তৈরি করে (চিত্র ৪.৩)। ধরে নেয়া হয়েছে যে লুপটি স্থির আছে এবং চুম্বকীয় ক্ষেত্র $\mathbf{B}$ সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল।

যদি চুম্বকীয় ক্ষেত্র কম্পনের সাথে পরিবর্তনশীল হয় তবে আমরা লিখতে পারি ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin\omega t \qquad (৪.২২)$$

এখানে $\mathbf{B}_0$ একটি সময় নির্ভরশীল ভেক্টর যার দিক Z অক্ষের দিকে। যেহেতু লুপটি স্থির অবস্থায় আছে। অতএব $V = 0$।



চিত্র ৪.৩ : চুম্বকীয় ক্ষেত্রে একটি একক পাকবিশিষ্ট চতুর্ভুজ কুণ্ডলী যার বাহু a ও b মিটার লম্বা।

তাহলে সমীকরণ (৪.২১) হতে পাই,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (৪.২৩)$$

সমীকরণ (৪.২২) কে (৪.২৩) এ স্থাপন করে এই স্থির আবদ্ধ লুপে আবিষ্ট ই. এম. এফ. নিম্নরূপে পাওয়া যায়,

$$\oint_c \mathbf{E}.\mathrm{dl} = \int_s (\nabla \times \mathbf{E}).\,\mathrm{da} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\,\mathbf{da}$$

$$= -\omega \cos\omega t \int_S \mathbf{B}_0.\,\mathrm{ds}$$

$$= -\left|\mathbf{B}_0\right| s\omega \cos\theta \cos\omega t \qquad (৪.২৪)$$

এখানে $S = ab$ হলো লুপের ক্ষেত্রফল, B_0 হলো চুম্বকীয় ক্ষেত্র $\mathbf{B}_0$ এর মান এবং সংকলের ডট গুণনের জন্য $\cos\theta$ এর উপস্থিতি ঘটেছে।

৪.৭ নির্দিষ্ট চুম্বকীয় ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান লুপ (A Rotating Loop in a Fixed Magnetic Field)

আমরা এখানে ৪.৩ চিত্রের লুপ বিবেচনা করবো এবং মনে করি যে এটি x–অক্ষের চতুর্দিকে ω কৌণিক বেগে ঘূর্ণায়মান। সুষম চুম্বকীয় ক্ষেত্র **B** কে (Z–অক্ষের দিকে) সময়-অনির্ভরশীল ধরা হয়েছে, অর্থাৎ $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ তাহলে সমীকরণ (৪.২১) হতে পাই,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

বা

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \qquad (৪.২৫)$$

এখন রৈখিক বেগ **V** এর মান কৌণিক বেগ ω এর সাথে

$$\left|\mathbf{V}\right| = \frac{b\omega}{2} \qquad (৪.২৬)$$

দ্বারা সম্পর্কিত। এখানে b হলো চতুর্ভুজ কুণ্ডলীর অনুভূমিক দৈর্ঘ্য অতঃপর সমীকরণ (৪.২৫) হতে যে কোনো সময় t তে লুপে আবিষ্ট ই. এম. এফ নিম্নরূপে পাওয়া যায়,

$$\oint_c \mathbf{E}.\mathrm{dl} = \oint_c (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\mathrm{dl} = 2\mathbf{V}\left|\mathbf{B}\right| a \sin\theta$$

$$= \left|\mathbf{B}\right| S\omega \sin\omega t \qquad (৪.২৭)$$

এখানে ঘূর্ণনের কোণ $\theta = \omega t$

যেহেতু $(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ লুপের উপর ও নিচের অংশ বরাবর যে কোনো অংশ dl এর উপর লম্ব, সেহেতু সংকলে অবদান শুধু লুপের খাড়া দুটি বাহু হতেই আসে। সমীকরণ (৪.২৫) থেকে এটি স্পষ্ট যে আবিষ্ট ই. এম. এফ শূন্য হবে যখন লুপের তল **B** এর উপর লম্ব হবে।

৪.৮ সময় নির্ভরশীল চুম্বকীয় ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান লুপ (Rotating Loop in a Time-dependent Magnetic Fied)

৪.৩ চিত্রের লুপটি আবার বিবেচনা করি এক্ষেত্রে চুম্বকীয় ক্ষেত্র **B** সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল (সমীকরণ ৪.২২) এবং এটি Z–অক্ষ বরাবর। আরও ধরে নেয়া হয়েছে যে

লুপটি x–অক্ষের চতুর্দিকে চুম্বকীয় ক্ষেত্রের ন্যায় একই কৌণিক বেগ ω তে ঘূর্ণায়মান এবং $t = 0$ সময়ে লুপের পৃষ্ঠে লম্ব Z–অক্ষের সমান্তরাল। যেহেতু লুপটি গতিশীল এবং চুম্বকীয় ক্ষেত্র $\mathbf{B}$ সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল, তাই আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্রের জন্য ফ্যারাডের ব্যবকলনী সমীকরণ (৪.২১) দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। সমীকরণ (৪.২১) কে লুপ দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠব্যাপী সংকলন করে পাই,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} + \int_S [\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})].\, d\mathbf{a} \qquad (৪.২৮)$$

এ সমীকরণের বাম পক্ষ ও ডান পক্ষের দ্বিতীয় পদের উপর স্টোকস এর মতবাদ প্রয়োগ করে পাওয়া যায় ,

$$\oint_C \mathbf{E}.\, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} + \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, d\mathbf{l} \qquad (৪.২৯)$$

এখানে C হলো আবদ্ধ চতুর্ভুজ লুপের সমোন্নতি রেখা। এখন সমীকরণ (৪.২২) কে সমীকরণ (৪.২৯) এ স্থাপন করে আবিষ্ট ই. এম. এফ পাই,

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\omega \cos\omega t \int_S \mathbf{B}_0.d\mathbf{a} + \left| \mathbf{B}_0 \right| s\omega \sin\theta \sin\omega t$$

$$= \left| \mathbf{B}_0 \right| s\omega\, [\sin^2\omega t - \cos^2\omega t\,]$$

$$= -\left| \mathbf{B}_0 \right| s\omega \cos (2\omega t) \qquad (৪.৩০)$$

এ থেকে প্রতীয়মান হয় যে, যে কম্পনে সিস্টেমটি ঘোরে সেই একই কম্পনে যখন চুম্বকীয় ক্ষেত্র $\mathbf{B}$ পরিবর্তিত হয় তখন বর্তনীতে আবিষ্ট ই. এম. এফ. দ্বিগুণ কম্পনে দিক পরিবর্তন করে।

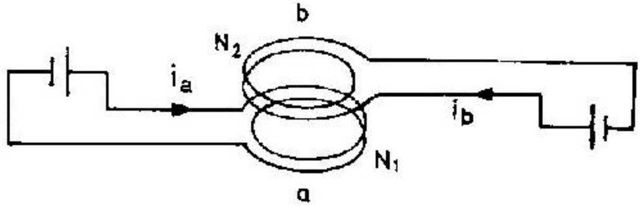
৪.৯ আবেশ ও আবিষ্ট ই. এম. এফ. (Inductance and Induced E.M.F.)

যদি একটি বর্তনীর চুম্বকীয় ফ্লাক্স অন্য একটি বর্তনীর প্রবাহ পথকে অতিক্রম করে তবে প্রথম বর্তনীতে পরিবর্তনশীল প্রবাহ দ্বিতীয় বর্তনীর প্রবাহকে প্রভাবান্বিত করে। এই পারস্পরিক ক্রিয়া ভালভাবে আলোচনা করা যায় শুধু একটি জ্যামিতিক রাশির প্রেক্ষিতে যাকে বলা হয় পারস্পরিক আবেশ (mutual inductance) । পারস্পরিক আবেশ M হলো একটি বর্তনীতে আবিষ্ট ই. এম. এফ এর মান প্রতি একক সময়ে অন্য বর্তনীতে প্রবাহ পরিবর্তনের হার যা নিম্নের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়,

$$\phi_b = -M_{ba} \frac{di_a}{dt} \qquad (৪.৩১)$$

৪.৪ চিত্র অনুযায়ী Subscript a ও b দুটি বর্তনী নির্দেশ করে। সমীকরণ (৪.৩১) হলো বর্তনী b এর উপর বর্তনী a এর প্রবাহ পরিবর্তনের ফল। এর উল্টা ফল নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\phi_a = -M_{ab} \frac{di_b}{dt} \qquad (৪.৩২)$$

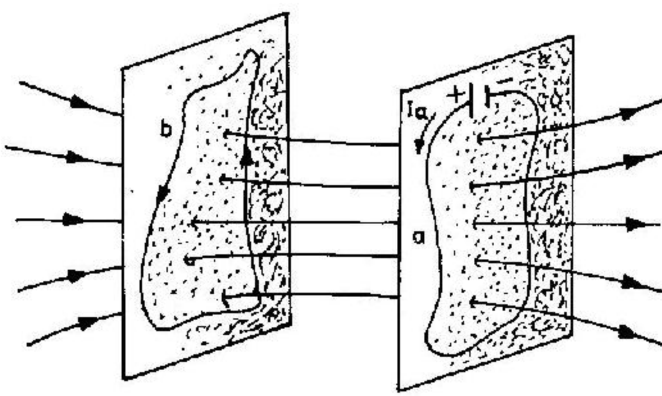


চিত্র ৪.৪ : দুটি বর্তনীর মধ্যে পারস্পরিক আবেশ

৪.৯.১ পারস্পরিক আবেশ (Mutual induction) : একটি বর্তনীতে প্রবাহের দরুন অন্য একটি বর্তনীতে সংশ্লিষ্ট চুম্বকীয় ফ্লাক্স এর জন্য আমরা একটি রাশিমালা প্রকাশ করবো। বর্তনী 'a' তে প্রবাহিত প্রবাহ Ia বর্তনী 'a' তে সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স ϕab সৃষ্টি করে (চিত্র ৪.৫),

$$\phi_{ab} = \int_{Sb} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{a}_b \qquad (৪.৩৩)$$

এখানে da_b হলো বর্তনী b দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো পৃষ্ঠ Sb এর ক্ষেত্রফলের একটি অংশ এবং Ba হলো Sb এর কোনো বিন্দুতে প্রবাহ Ia এর দরুন চুম্বকীয় আবেশ।



চিত্র ৪.৫ : a ও b দুটি বর্তনী। b তে সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স ϕab বর্তনী a হতে সৃষ্ট।

Ia দ্বারা উৎপন্ন ভেক্টর বিভব Aa হতে চুম্বকীয় ফ্লাক্স ϕab নিম্নরূপে কষন করা যায়,

$$\phi ab = \int_{Sb} (\nabla \times \mathbf{A}_a) \cdot d\mathbf{a}_b$$

$$= \oint_b \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l}_b$$

$$= \oint_b \left(\frac{\mu_0 I_a}{4\pi} \oint_a \frac{d\mathbf{l}_a}{\mathbf{r}}\right) d\mathbf{l}_b$$

$$= \frac{\mu_0 I_a}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a . d\mathbf{l}_b}{\mathbf{r}}$$

$$= M_{ab} I_a \qquad (৪.৩৪)$$

যেখানে
$$M_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{l}_a . d\mathbf{l}_b}{\mathbf{r}} \qquad (৪.৩৫)$$

হলো দুটি বর্তনীর মধ্যে পারস্পরিক আবেশ। এটি নিউম্যান সমীকরণ (neumann Equation) নামে পরিচিত।

একইভাবে বর্তনী a তে সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স হবে,

$$\phi_{ba} = M_{ba} I_b$$

যেহেতু নিউম্যান সমীকরণ Subscript a ও b এর প্রেক্ষিতে প্রতিসম,

অতএব
$$M_{ab} = M_{ba} \qquad (৪.৩৬)$$

এটি লক্ষণীয় যে পারস্পরিক আবেশ সম্পূর্ণরূপে দুটি বর্তনীর আকারের উপর নির্ভরশীল একটি সংখ্যা এবং একে যখন একটি বর্তনীর প্রবাহ দ্বারা গুণ করা হয় তখন অন্য বর্তনীতে সংশ্লিষ্ট চুম্বকীয় ফ্লাক্স পাওয়া যায়। এর একক হলো হেনরী (Henry) বা ওয়েবার/অ্যাম্পিয়ার। দুটি বর্তনীর মধ্যে পারস্পরিক আবেশ এক হেনরী হবে যখন একটি বর্তনীতে এক অ্যাম্পিয়ার প্রবাহ অন্য বর্তনীতে এক ওয়েবার-পাক চুম্বকীয় ফ্লাক্স উৎপন্ন করে।

বর্তনী b তে Ia প্রবাহের পরিবর্তন দ্বারা আবিষ্ট ই. এম. এফ হবে

$$\oint_b \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_{ab}}{dt} = -M_{ab}\frac{dI_a}{dt} \qquad (৪.৩৭)$$

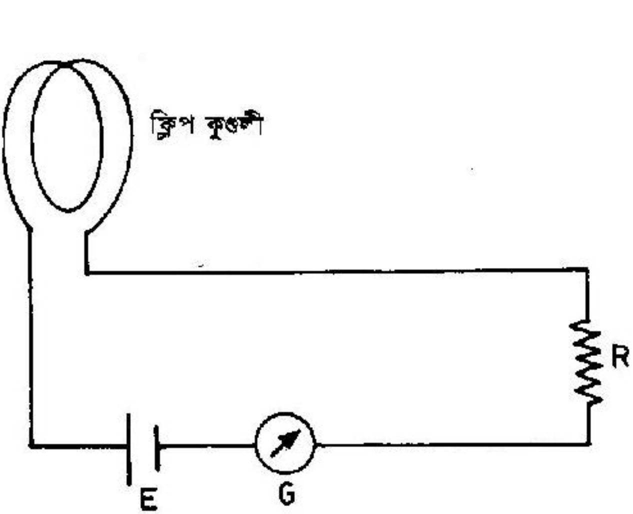
একইভাবে বর্তনী a তে Ib প্রবাহের পরিবর্তন দ্বারা আবিষ্ট ই. এম. এফ হবে

$$\oint_a \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_{ba}}{dt} = -M_{ba}\frac{dI_b}{dt} \qquad (৪.৩৮)$$

এ সমীকরণ আবিষ্ট ই.এম.এফ গণনা করার জন্য খুবই সুবিধাজনক কারণ এতে শুধু পারস্পরিক আবেশ ও $\frac{dI}{dt}$ পদ জড়িত যা সহজেই মাপা যায়।

৪.৯.২ স্বীয় আবেশ (Self Inductance) : এমনকি যেখানে শুধু একটি বর্তনী জড়িত সেখানকার জন্যও ফ্যারাডের আবেশের ফল গুরুত্বপূর্ণ হতে পারে। নিম্নের চিত্র (৪.৬) হতে এটি পরীক্ষা দ্বারা লক্ষ্য করা যেতে পারে। চিত্রে মাএ একটি কুণ্ডলী আছে

উক্ত বর্তনীতে রোধ R পরিবর্তন করে যদি প্রবাহের পরিবর্তন ঘটানো হয় তবে কুণ্ডলীতে সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স পরিবর্তিত হয় এবং ফলে এতে ই.এম.এফ আবিষ্ট হবে। পারস্পরিক



চিত্র ৪.৬ : গ্যালভানোমিটার ও ব্যাটারির সাথে ক্লিপ কুণ্ডলী ব্যবহার করা হয়েছে।

এবং ϕ_{11} হলো কুণ্ডলীতে তার স্বীয় প্রবাহের দরুন সৃষ্ট ফ্লাক্স N = পাক সংখ্যা এবং I = কুণ্ডলীতে প্রবাহ। অতএব স্বাবেশ হলো বর্তনীতে প্রতি একক প্রবাহের দরুন সংশ্লিষ্ট ফ্লাক্স। একটি পরিবর্তনশীল প্রবাহ দ্বারা আবিষ্ট ই.এম.এফ. হবে,

$$\oint E.dl = \frac{N_1\, d\phi_{11}}{dt} \qquad (৪.৪০)$$

আবার $\phi_{11} = \frac{LI}{N_1}$ সমীকরণ (৪.৩৯) হতে

অতএব $d\phi_{11} = \frac{L}{N_1} dI$

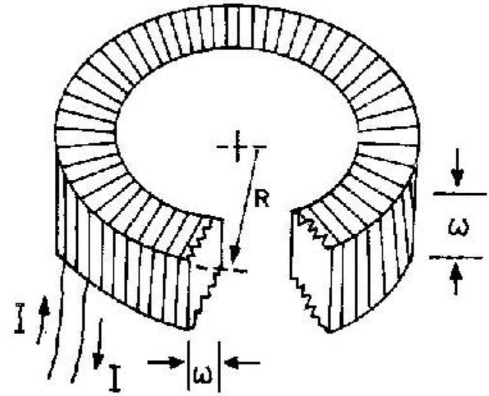
সমীকরণ (৪.৪০) তে $d\phi_{11}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\oint E.dl = -L\frac{dI}{dt} \qquad (৪.৪১)$$

লেঞ্জের নিয়ম অনুসারে আবিষ্ট ই.এম.এফ. প্রবাহ পরিবর্তনে বাধা দেয়। স্বাবেশের এককও হেনরী একটি বর্তনীতে আবেশের ফল যান্ত্রিক পদ্ধতির জড়তার মতোই। এভাবে স্থির প্রবাহের যে কোনো পরিবর্তনের সাথে আবিষ্ট ই.এম.এফ. এর সৃষ্টি হয় যা এই পরিবর্তনকে বাধা দেয়।

৪.৯.৩ একটি টরোইডাল কয়েলের স্বাবেশ (Self inducectance of a toroidal coil) : অচুম্বকীয় পদার্থের উপর N পাকবিশিষ্ট একটি টরোইডাল জড়ানো আছে (চিত্র ৪.৭)। বর্তনী আকারে অ্যাম্পিয়ারের সূত্র (সমীকরণ ৩.২৬) অনুসারে দিগাংশ দিকে টরোইডের ভিতরে ρ ব্যাসার্ধ চুম্বকীয় আবেশ হবে

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \qquad (৪.৪২)$$



চিত্র ৪.৭ : বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট টরোইডের কুণ্ডলীর গড় ব্যাসার্ধ R ।

এরূপে,

$$\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{R-\omega/2}^{R+\omega/2}\frac{\omega d\rho}{\rho}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\omega \ln\left[\frac{2R+\omega}{2R-\omega}\right] \qquad (৪.৪৩)$$

এবং
$$L = \frac{\mu_0 N^2\omega}{2\pi}\ln\left[\frac{2R+\omega}{2R-\omega}\right] \qquad (৪.৪৪)$$

যখন
$$R >> \omega$$

$$\frac{2R+\omega}{2R-\omega} \approx \left(1+\frac{\omega}{2R}\right)\left(1+\frac{\omega}{2R}\right)$$

$$\approx 1+\frac{\omega}{R}$$

$$\ln\left[\frac{2R+\omega}{2R-\omega}\right] \approx \frac{\omega}{R} \qquad (৪.৪৫)$$

এবং
$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi R}\omega^2 \qquad (R>>\omega) \qquad (৪.৪৬)$$

একটি টরোইডের স্বাবেশ হলো পাক সংখ্যার বর্গের এবং পেঁচানো অংশ দ্বারা আবদ্ধ প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলের সমানুপাতিক ও পেঁচানো অংশের দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক।

৪.৯.৪ যুগলায়নের সহগ (Coefficient of coupling) : একটি একক পাকবিশিষ্ট কুণ্ডলী a বিবেচনা করা যাক, যার মধ্যে দিয়ে প্রবাহিত প্রবাহ I_a চুম্বকীয় ফ্লাক্স ϕ_{aa} সৃষ্টি

করে এবং আরেকটি একক পাকবিশিষ্ট কুণ্ডলী b এমনভাবে স্থাপন করি যেন ϕ_{aa} এর একটি ভগ্নাংশ Ka এর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করে। তাহলে

$$\phi_{ab} \propto \phi_{aa}$$

$$= K\phi_{aa} \qquad (৪.৪৭)$$

কুণ্ডলী 'a' এর স্বাবেশ হবে

$$L_a = \frac{\phi_{aa}}{I_a}$$

এবং কুণ্ডলী দুটির পারস্পরিক আবেশ

$$M_{ab} = \frac{K_a\,\phi_{aa}}{I_a} = K_a L_a$$

যেহেতু $M_{ba} = M_{ab} = M$

$$M^2 = K_a K_b L_a L_b$$

$$M = \pm K\,(L_a L_b)^{1/2}$$

যেখানে $K = \pm\,(K_a K_b)^{1/2}$ (৪.৪৮)

K হলো দুটি কুণ্ডলীর মধ্যেকার যুগলায়ন সহগ (Coefficient of coupling) এবং এর মান +1 হতে −1 পর্যন্ত পরিবর্তিত হয়। একক পাকবিশিষ্ট কুণ্ডলী দুটি যদি মিলে যায় তবে, K এর পূর্ণাঙ্গ মান একক হবে এবং এর চিহ্ন M এর চিহ্নের মত হবে।

৪.১০ চুম্বকীয় ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি (Energy Stored in a Magnetic Field)

যখন কোনো বর্তনীতে প্রবাহ বৃদ্ধি করা হয় তখন এর সাথে সংযুক্ত চুম্বকীয় ক্ষেত্র বৃদ্ধি পায়। ফ্যারাডের সুত্র অনুসারে সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল এই চুম্বকীয় ক্ষেত্র একটি তড়িৎ ক্ষেত্র আবিষ্ট করে যা প্রতিদানে প্রবাহ সৃষ্টিকারী তড়িৎ আধানের উপর বল প্রয়োগ করে। যেহেতু যে কোনো সময়ে আবিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র দ্বারা আধানসমূহের উপর কৃত কাজকে প্রবাহ বজায় রাখার জন্য বাহ্যিক ভোল্টেজ দ্বারা ভারসাম্যতা রক্ষা করা হয় ফলে এভাবে ব্যয়িত শক্তিকে সঞ্চিত স্থৈতিক শক্তি হিসেবে গণ্য করা যায়। এরূপে স্থৈতিক শক্তিকে প্রবাহের চুম্বকীয় ক্ষেত্রের সাথে জড়িত শক্তি বলা হয়।

মনে করি একটি একক বর্তনী আছে এবং এতে অপরিবর্তী প্রবাহ I বিদ্যমান। যদি বর্তনীর মধ্যেকার ফ্লাক্স এর পরিবর্তন হয় তবে এর চতুর্দিকে একটি ই.এম.এফ. আবিষ্ট হবে। এখন প্রবাহকে অপরিবর্তী রাখতে হলে প্রবাহের উৎসকে নিম্নহারে কাজ করতে হবে,

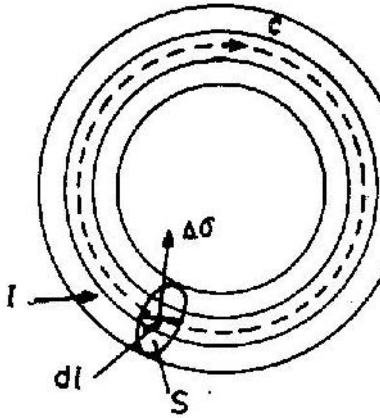
$$\frac{dw}{dt} = -I\oint E.dl = -I\frac{d\phi}{dt} \qquad (৪.৪৯)$$

এটি বর্তনীতে ওহ্‌ম লসের অতিরিক্ত। এরূপে প্রবাহ I বহনকারী একটি বর্তনীর মধ্য দিয়ে ফ্লাক্স পরিবর্তন যদি $\delta\phi$ হয় তবে উৎস দ্বারা কাজ হবে

$$\delta w = I\,\delta\phi$$

এখন আমরা প্রবাহ ও তড়িৎ ক্ষেত্রের সাধারণ স্থির গতি বণ্টন স্থাপনের জন্য কৃত কাজের সমস্যা বিবেচনা করবো। আমরা কল্পনা করি যে প্রবাহের গঠন প্রক্রিয়া খুব আস্তে ঘটে যাতে

$\nabla.\mathbf{J} = 0$ কার্যকর হয়। তাহলে প্রবাহ বন্টনকে প্রাথমিক প্রবাহ লুপের নেটওয়ার্ক হিসেবে ভেঙ্গে দেখানো যেতে পারে, যার একটি উদাহরণ হলো $\Delta\sigma$ প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ক্ষুদ্র প্রবাহ টিউব, যা একটি আবদ্ধ পথ C অনুসরণ করে এবং লম্ব **n** সহ একটি পৃষ্ঠ S ব্যাপী বিস্তৃত (চিত্র ৪.৮)।



চিত্র ৪.৮ : একটি সলিনইডাল আয়তনের প্রবাহ বন্টন যা অনেকগুলি সলিনইডাল প্রবাহবাহী টিউবে বিভক্ত।

আবিষ্ট ই.এম.এফ এর বিরুদ্ধে কৃত কাজের বৃদ্ধি লুপের মধ্য দিয়ে চুম্বকীয় আবেশ পরিবর্তনের প্রেক্ষিতে এভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int \mathbf{n}.d\mathbf{B}\, da = J\Delta\sigma \int d\mathbf{B}.d\mathbf{a}$$

যেহেতু আমরা শুধু একটি ক্ষুদ্র বর্তনী বিবেচনা করেছি তাই Δ ব্যবহৃত হয়েছে। আমরা যদি চুম্বকীয় ক্ষেত্র **B** কে ভেক্টর বিভব **A** এর প্রেক্ষিতে প্রকাশ করি তবে

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int_S (\nabla \times \delta\mathbf{A}).\, d\mathbf{a}$$

স্টোক এর মতবাদ প্রয়োগ করে লেখা যায়

$$\Delta(\delta W) = \mathbf{J}\Delta\sigma \oint_C \delta\mathbf{A}.d\mathbf{l}$$

যেহেতু $d\mathbf{l}$ ও $\mathbf{J}$ সমান্তরাল, অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\mathbf{J}\Delta\sigma d\mathbf{l} = \mathbf{J}d^3x$ ।

স্পষ্টতই এরূপ সকল ক্ষুদ্র লুপের উপরের যোগফল হবে আয়তন সংকলন। অতএব ভেক্টর বিভব $\delta\mathbf{A}(x)$ পরিবর্তনের জন্য বাহ্যিক উৎস দ্বারা সম্পাদিত কাজের মোট বৃদ্ধি হবে

$$\delta W = \int \delta\mathbf{A}.\mathbf{J}d^3x \tag{৪.৫০}$$

$\mathbf{J}$ ও $\delta\mathbf{A}$ ব্যতিরেকে চুম্বকীয় ক্ষেত্র জড়িত একটি রাশিমালা অ্যাম্পিয়ারের নিয়ম ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

সুতরাং $$\delta W = \int \delta \mathbf{A}.(\nabla \times \mathbf{H})\, d^3x \qquad (৪.৫১)$$

ভেক্টর রাশি $$\nabla.(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}.(\nabla \times \mathbf{P}) - \mathbf{P}.(\nabla \times \mathbf{Q})$$

ব্যবহার করে সমীকরণ (৪.৫১) কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\delta W = \int [\mathbf{H}.(\nabla \times \delta \mathbf{A}) + \nabla.(\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A})]\, d^3x$$

যদি ক্ষেত্র বণ্টনকে স্থানীয়করণ করা হয় তবে দ্বিতীয় সংকল শূন্য হবে। **A** এর প্রেক্ষিতে **B** এর সম্বন্ধসহ শক্তি বৃদ্ধি লেখা যায়

$$\delta W = \int \mathbf{H}.\, \delta \mathbf{B} d^3$$

এটি ফেরো চুম্বকীয় বস্তুসহ সকল প্রকার চুম্বকীয় মাধ্যমের জন্য প্রযোজ্য। আমরা যদি মনে করি যে মাধ্যমটি প্যারা বা ডায়া চুম্বকীয় যেন **H** ও **B** এর মধ্যে একটি সরল সম্পর্ক বজায় থাকে, তখন

$$\mathbf{H}.\delta \mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{H}.\mathbf{B})$$

আমরা যদি চুম্বকীয় ক্ষেত্রকে শূন্য হতে চূড়ান্ত মান পর্যন্ত নিয়ে আসি তবে মোট চুম্বকীয় শক্তি হবে

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}.\mathbf{B}\, d^3x \qquad (৪.৫২)$$

আমরা জানি মুক্ত ক্ষেত্রে আধানসমূহের জন্য শক্তি

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d^3x \qquad (৪.৫৩)$$

এখানে স্থির তড়িৎ শক্তিকে আধান ঘনত্ব ও বিভবের প্রেক্ষিতে প্রকাশ করা হয়েছে। এখন সমীকরণ (৪.৫৩) এর চুম্বকীয় সমতুল্যতা সমীকরণ (৪.৫০) হতে পাওয়া যেতে পারে যদি **J** ও **A** এর মধ্যে একটি সরল সম্বন্ধ ধরি তাহলে চুম্বকীয় শক্তি পাওয়া যাবে

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{J}.\mathbf{A}\, d^3x \qquad (৪.৫৪)$$

μ_1 ভেদনযোগ্যতাসম্পন্ন একটি বস্তু যখন চুম্বকীয় ক্ষেত্রে (যার প্রবাহ উৎস নির্দিষ্ট) স্থাপন করা হয় তখন শক্তি পরিবর্তনের চুম্বকীয় সমস্যা স্থির তড়িৎ সমস্যার ন্যায় ব্যবহার করা যেতে পারে। **E** কে **B** দ্বারা এবং **D** কে **H** দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যায়। আদি মাধ্যমের ভেদনযোগ্যতা μ_0 এবং চুম্বকীয় আবেশ $\mathbf{B}_0$। বস্তুটিকে যখন যথাস্থানে রাখা হয় তখন **B** এবং **H** হবে নির্ণেয় ক্ষেত্র। ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট উৎসের জন্য শক্তির পরিবর্তন হবে,

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}.\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}.\mathbf{B}_0)\, d^3x \qquad (৪.৫৫)$$

এখানে বস্তুর আয়তন V ব্যাপী সংকলন নেয়া হয়েছে একে বিকল্প আকারে প্রকাশ করা যায়,

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mu_1 - \mu_0)\, \mathbf{H}.\mathbf{H}_0\, d^3x$$
$$= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \mathbf{B}.\mathbf{B}_0\, d^3x \qquad (৪.৫৬)$$

μ_0 এবং μ_1 ক্ষেত্র শক্তির উপর নির্ভরশীল।

৪.১১ একটি সমাক্ষীয় রেখার স্বাবেশ (Self Inductance of a Coaxial Line)

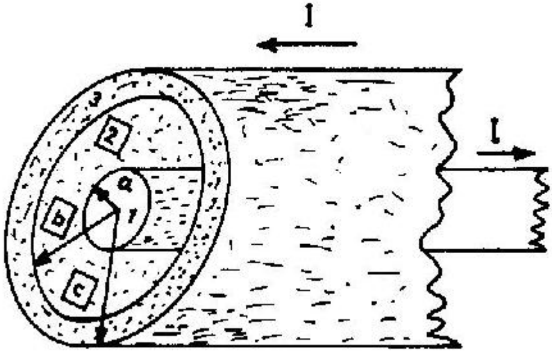
একটি নির্দিষ্ট আয়তনব্যাপী বণ্টিত প্রবাহসহ গঠিত একটি বর্তনীর স্বাবেশ ঐ সিস্টেমে সঞ্চিত শক্তি হতে বর্ণনা করা যায়,

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_\infty \mathbf{B}^2 d\tau = \frac{1}{2}LI^2 \tag{৪.৫৭}$$

তাহলে স্বাবেশ

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2}\int_\infty \mathbf{B}^2 d\tau \tag{৪.৫৮}$$

এখানে সংকলটি সব স্থানব্যাপী মূল্যায়িত হয়েছে। মনে করা যায় কম্পন খুব কম যাতে পরিবাহীর প্রস্থচ্ছেদব্যাপী প্রবাহ সুষমভাবে বণ্টিত হয়। এর সরলীকরণের জন্য প্রান্ত প্রভাব উপেক্ষা করা হয়েছে।



চিত্র ৪.৯ : সমাক্ষীয় ক্যাবলসমূহ I প্রবাহ বহন করে এবং এদের ব্যাসার্ধ a,b,c বাইরের ও ভিতরের প্রবাহ দিক বিপরীতমুখী।

৪.৯ চিত্রে একটি সমাক্ষীয় রেখা দেখানো হয়েছে। আমরা এখানে ১,২,৩ ও ৪ নং এলাকার প্রতি একক দৈর্ঘ্যে একের পর এক চুম্বকীয় শক্তি নির্ণয় করবো এবং অতঃপর এসব শক্তির যোগফল সমান $\frac{1}{2}L^1 I^2$ বসাবো। এটি থেকে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে স্বাবেশ L^1 পাওয়া যাবে।

(ক) ১নং এলাকায় ρ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি পথে অ্যাম্পিয়ারের বর্তনী নিয়ম প্রয়োগ করে পাই,

$$2\pi\rho\mathbf{B} = \mu_0 I\frac{\pi\rho^2}{\pi a^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2} \tag{৪.৫৯}$$

সমীকরণ (৪.৫৯) হতে B এর মান (৪.৫৭) তে বসিয়ে পাই,

$$W_{m_1} = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \left(\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi\rho d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \qquad (৪.৬০)$$

খ) ২নং এলাকায় : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$$W_{m_2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (৪.৬১)$$

গ) ৩নং এলাকায় : ρ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলাকার পথের মধ্যে প্রবাহ হবে কেন্দ্রীয় পরিবাহীর মোট প্রবাহ I হতে সেই অংশ কম যা ব্যাসার্ধ b ও ρ এর মধ্যেকার বাহ্যিক পরিবাহীর মধ্যে অবস্থিত। এরূপে

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\left[I - I\left(\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\left(\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}\right)$$

এবং $$W_{m_3} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2}\ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)}\right] \qquad (৪.৬২)$$

ঘ) ৪নং এলাকায় : $B = 0, \quad W_{m_4} = 0$

সুতরাং তারে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে আবেশ

$$L' = \frac{2(W_{m_1} + W_{m_2} + W_{m_3} + W_{m_4})}{I^2}$$

$$= \mu_0\left[\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right\}\right] \qquad (৪.৬৩)$$

বন্ধনীর মধ্যেকার দ্বিতীয় পদটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। এটি হলো পরিবাহীর মধ্যেকার গোলাকার চুম্বকীয় শক্তির সাথে জড়িত আবেশ।

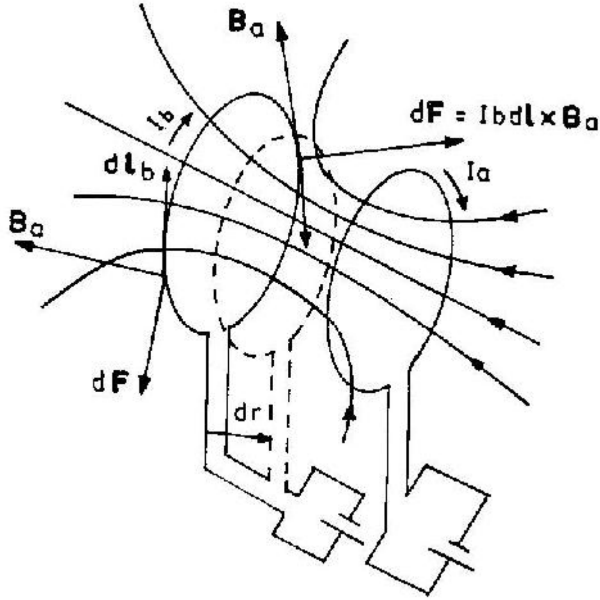
৪.১২ দুটি বর্তনীর মধ্যে চুম্বকীয় বল (Magnetic Force between two Circuits)

ধরে নেই কোনো ঘূর্ণন ছাড়া একটি বর্তনীর সামান্য অসদ অপসারণ (virtual translation) ঘটিয়ে এবং অতঃপর শক্তির সংরক্ষণ নীতি প্রয়োগ করে লেখা যায় : উৎস কর্তৃক সম্পাদিত কাজ = চুম্বকীয় শক্তির বৃদ্ধি + কৃত যান্ত্রিক কাজ। সমীকরণের খাতিরে জুলের ক্ষতি বাদ দেয়া হয়েছে ; আরও ধরে নেয়া হয়েছে যে সরণ খুবই ধীর গতিতে হয় যাতে গতিশক্তি হিসেবের বাইরে রাখা যায়

অসদ সরণ যে কোনো সুবিধামতো উপায়ে হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, হয় প্রবাহ অথবা সংযুক্ত ফ্লাক্সকে ধ্রুব রাখা হয়। যেটাকেই সত্য বলে ধরা হোক না কেন ফল একই হবে। কারণ দুটি নির্দিষ্ট বর্তনীর মধ্যেকার বলের একক নির্দিষ্ট মান আছে।

৪.১৩ ধ্রুব প্রবাহে দুটি বর্তনীর মধ্যেকার বল (Magnetic Force when the Currents are kept Constant)

নিম্নের চিত্র (৪.১০) দুটি লুপে প্রবাহ I_a এবং I_b একইদিকে প্রবাহিত হয়। যেহেতু চিত্রে বল এমনভাবে দেখানো হয়েছে যে লুপ দুটি একে অপরের দিকে সরে যায় ফলে কুণ্ডলী দুটি নির্দিষ্ট স্থানে রাখা যাবে যদি একমাত্র সমান ও বিপরীত মুখী যান্ত্রিক বল দ্বারা চুম্বকীয় বলকে ভারসাম্য রাখা হয়।



চিত্র ৪.১০ : দুটি লুপে প্রবাহ I_a ও I_b। B এর বলরেখা a লুপে সৃষ্ট হয়ে b তে সংশ্লিষ্ট হয়েছে। লক্ষণীয় যে ক্ষুদ্রতম বল dF এবং কুণ্ডলীর সমান্তরাল একটি উপাংশ আছে।

প্রবাহকে ধ্রুব ধরে নিয়ে আমরা এখন লুপ b তে চুম্বকীয় বল F_{ab} বের করবো। মনে করি লুপ 'a' এর দিকে লুপ b কিছুটা দূরত্ব dr সরে যায়। যেহেতু প্রবাহকে ধ্রুব রাখা হয়েছে সেহেতু কেবল মিথস্ক্রিয়া শক্তি পরিবর্তিত হয় এবং স্বাবেশ ধ্রুব থাকে।

$$dW_m = I_a I_b \, dM$$

$$= I_a \, d\phi_{ba} = I_b \, d\phi_{ab} \qquad (৪.৬৪)$$

এখানে ϕ_{ba} হলো a তে উৎপন্ন ফ্লাক্স যা a তে সংশ্লিষ্ট এবং একইভাবে ϕ_{ab} কেও বর্ণনা করাযায়। পারস্পারিক আবেশ M এবং ফ্লাক্স ϕ_{ab} ও ϕ_{ba} সবই এক্ষেত্রে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় যাতে dWm একটি ধনাত্মক সংখ্যা হয় এবং সঞ্চিত শক্তি বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। এখানে পারস্পরিক আবেশ ধনাত্মক।

এখন উৎস দ্বারা কৃত কাজ বিবেচনা করবো যা লুপসমূহে প্রবাহ উৎপন্ন করে। লুপ b তে ϕ_{ab} বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় এবং আবিষ্ট ই.এম.এফ এমন দিকে কাজ করে যেন এটি নিজেই Ba এর দিকে বাধাদানকারী চুম্বকীয় বল তৈরি করে। অতএব লুপ b তে আবিষ্ট ই.এম.এফ অবশ্যই প্রবাহ Ib কে বাধা দিতে চেষ্টা করবে। যদি Ib কে অপরিবর্তী রাখা হয় তবে উৎস ভোল্টেজ প্রতি মুহূর্তে $\frac{d}{dt}\phi_{ab}$ দ্বারা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হবে। লুপ b এর উৎস তাহলে কাজ করবে

$$dW_{ab} = Ib\frac{d}{dt}\phi_{ab}\,dt = Ib\,d\phi_{ab}$$

$$= I_b I_a\,dM \qquad (৪.৬৫)$$

প্রতিসাম্য অনুসারে লুপ a তে উৎস দ্বারা সরবরাহকৃত কাজ একই হবে এবং উৎস কর্তৃক মোট সরবরাহকৃত কাজ

$$dW_s = 2\,I_a I_b\,dM \qquad (৪.৬৬)$$

যা চুম্বকীয় শক্তি বৃদ্ধির দ্বিগুণ। বাকিটা যান্ত্রিক কাজে ব্যয়িত। অন্যভাবে বলা যায়, যান্ত্রিক কাজ সমপরিমাণ চুম্বকীয় শক্তির সৃষ্টি করে এবং উভয়েই উৎস কর্তৃক যোগান প্রাপ্ত। সম্পাদিত যান্ত্রিক কাজ

$$\mathbf{F}_{ab}.d\mathbf{r} = I_a I_b\,dM = (dw_m)_I \qquad (৪.৬৭)$$

এখানে Fab হলো a বর্তনী দ্বারা বর্তনীর উপর প্রয়োগকৃত বল। Subscript I নির্দেশ করে যে প্রবাহ ধ্রুব রাখা হয়েছে। যেহেতু সমীকরণ (৪.৬৭) এর ডান পাশের রাশি ধনাত্মক, অতএব স্কেলার গুণন Fab.dr অবশ্যই ধনাত্মক হবে এবং dr এর ন্যায় বল Fab কুণ্ডলী a এর দিকে নির্দেশ করবে। এটি অবশ্যই সত্য, কারণ শুরুতেই আমরা দেখেছি যে কুণ্ডলী দুটি একে অপরের নিকট আসতে চায়। সাধারণত Fab এর x উপাংশ হবে,

$$F_{abx} = I_a I_b \frac{\partial M}{\partial x}$$

এখানে x এর বর্ধন হলো dr এর x–উপাংশ। আবার

$$F_{abx} = I_a\left(\frac{\partial \phi_{ba}}{\partial x}\right)_I = \left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)_I \qquad (৪.৬৮)$$

যদিও আমরা দুটি বর্তনীবিশিষ্ট সিস্টেম বিবেচনা করেছি তথাপি এই পদ্ধতি যে কোনো সংখ্যক বর্তনীর জন্য প্রযোজ্য। একমাত্র পার্থক্য হলো বলের প্রকাশ Fabx এ ধরনের পদের সমষ্টি দ্বারা প্রতিস্থাপিত হয়েছে। দুটি প্রবাহব্যাপী বর্তনীর মধ্যে বলের প্রকাশ হিসেবে সমীকরণ (৪.৬৭) ও

$$F_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{\mathbf{r}(dla.dlb)}{r^3} \qquad (৪.৬৯)$$

পাওয়া যায়। এখন নিউম্যানের সূত্র (৪.৩৫) ব্যবহার করে (৪.৬৭) কে (৪.৬৯) এ রূপান্তরিত করব। তা হলে লেখা যায়

$$\mathbf{F}_{ab}.d\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b\, d\left(\oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{la}.d\mathbf{lb}}{\mathbf{r}}\right) \qquad (৪.৭০)$$

এতে বুঝা যায় যে ডানপাশের বন্ধনীর মধ্যেকার রাশির ব্যবকলনী অবশ্যই ৪.১০ চিত্রের b কুণ্ডলীর সরণ dr এর প্রতিষঙ্গ। রেখা সংকল ও d কারকের (operator) ক্রম পরস্পর বিনিময় করে পাওয়া যায়

$$\mathbf{F}_{ab}.d\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{la}.d\mathbf{lb}}{\mathbf{r}}\, d \qquad (৪.৭১)$$

কুণ্ডলী b এর dr দূরত্বে সরে যাওয়ার পদ্ধতিতে dla ও dlb উভয়েই অপরিবর্তিত থাকে এবং সংকল চিহ্নের ভিতরে প্রথম d শুধু $\frac{1}{r}$ গুণাঙ্কের উপর কাজ করে। এখন যদি আমরা $\mathbf{r}_1$ কে $d\mathbf{r}$ এর দিকে a হতে b পর্যন্ত নির্দেশিত একক ভেক্টর হিসেবে সংজ্ঞায়িত করি

তবে $$d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2} = -\frac{\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}}{r^2}$$

এবং $$\mathbf{F}_{ab}.d\mathbf{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{d\mathbf{la}.d\mathbf{lb}}{\mathbf{r}}\, \mathbf{r}_1.d\mathbf{r} \qquad (৪.৭২)$$

যেহেতু ডান পাশের পদ dr, dla ও dlb এর উপর নির্ভরশীল নয় সেহেতু একে সংকল চিহ্নের ভিতর হতে সরিয়ে দেয়া যেতে পারে, তাহলে পাওয়া যায়,

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{\mathbf{r}_1\,(d\mathbf{la}.d\mathbf{lb})}{r^2} \qquad (৪.৭৩)$$

এটি অবিকল সমীকরণ (৪.৬৯), যা চুম্বকীয় শক্তি নিয়মের বিকল্প রূপ।

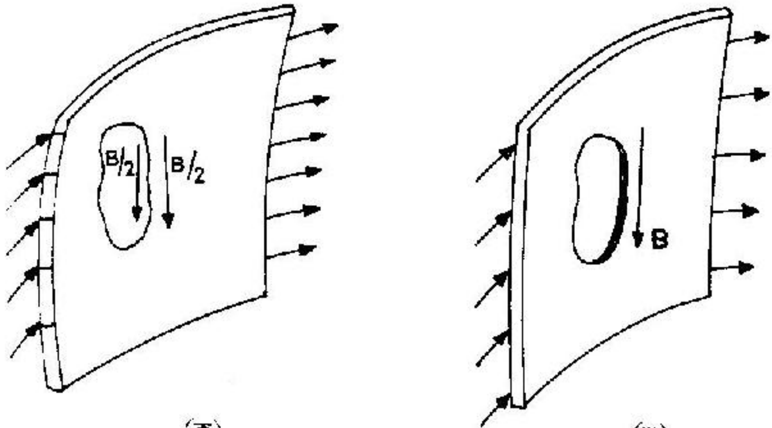
৪.১৪ চুম্বকীয় চাপ (Magnetic Pressure)

মনে করি একটি প্রবাহ পাত যা অ্যাম্পিয়ার/মিটার প্রবাহ বহন করে এবং একটি সুষম স্পর্শ (tangential) চুম্বকীয় ক্ষেত্র $B/2$ (যা B এর উপর লম্ব অন্যত্র প্রবাহিত প্রবাহ λ দ্বারা সৃষ্ট) এর মধ্যে অবস্থিত থাকে (চিত্র ৪.১১ক)

যদি λ এর মান খুব কম হয় তবে চুম্বকীয় ক্ষেত্র প্রবাহ পাত দ্বারা খুব একটা প্রভাবিত হয় না এবং প্রতি ক্ষেত্রফলে বল হলো $\lambda B/2$

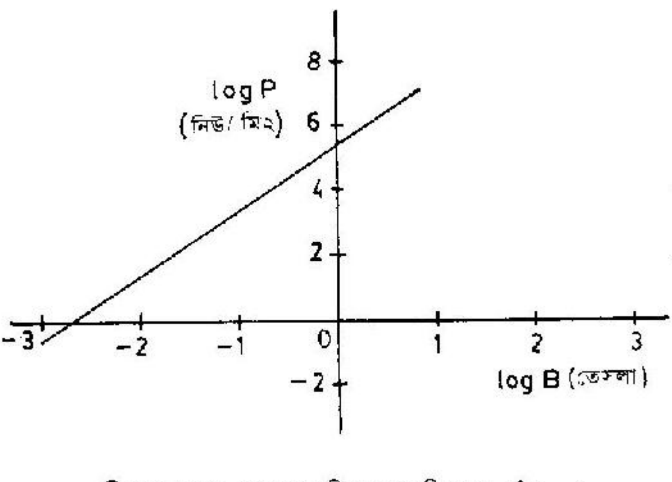
এখন λ এর মান বৃদ্ধি করা হবে যতক্ষণ না এটি একদিকে সাহায্যকারী ক্ষেত্র $B/2$ এবং অপর দিকে বাধাদানকারী ক্ষেত্র $B/2$ সৃষ্টি করে (চিত্র ৪.১১খ)। তাহলে $\lambda = B/\mu_0$ এবং প্রতি একক ক্ষেত্রফলে বল বা চাপ হবে $B^2/2\mu_0$। এই ফল পাওয়া যায় সমতল প্রবাহ পাতের জন্য, তবে এটি যে কোনো প্রবাহ পাতের জন্য প্রযোজ্য হবে যখন একদিকে $B = 0$ হবে।

চুম্বকীয় চাপের এই মান দ্বারা অন্যভাবে শক্তি ঘনত্ব কথন করা যায়। কল্পনা করা যাক প্রবাহ পাত অত্যন্ত ধীর গতিতে পিছনে সামান্য দূরত্ব x–ব্যাপী সরে যায়। তাহলে চুম্বকীয় চাপ দ্বারা প্রবাহ পাতের ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল a এর উপর সম্পাদিত কাজ হবে $ax\,(B^2/2\mu_0)$।



চিত্র ৪.১১ (ক) : একটি প্রবাহ পাতে খুব দুর্বল প্রবাহ λ বহন করে এবং একটি সুষম চুম্বক ক্ষেত্র $B/2$ তে অবস্থিত।
(খ) চিত্র (ক) এর মোট চৌম্বক ক্ষেত্র যোগ প্রবাহ পাতের চৌম্বক ক্ষেত্র।

এই কাজ উৎস কর্তৃক সরবরাহকৃত হয় যা B কে অপরিবর্তী রাখে এবং এটি ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি বৃদ্ধির সমান বা শক্তি ঘনত্বের $a x$ গুণফল। শক্তি ঘনত্ব হবে $B^2/2\mu_0$ । ৪.১২ চিত্রে চুম্বকীয় আবেশ B এর ফাংশন হিসেবে চুম্বকীয় চাপ বা চুম্বকীয় শক্তি ঘনত্ব $B^2/2\mu_0$ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৪.১২ : B এর ফাংশন হিসেবে চুম্বকীয় চাপ $B^2/2\mu_0$ ।

সমাধানকৃত সমস্যাবলী
(Solved Problems)

সমস্যাবলী (problems)

১। একটি বগি দুটি রেলের (যাদের মাঝখানে লম্বা একটি পানির ট্যাংক আছে) উপর দিয়ে চলে। রেল দুটির মধ্যবর্তী স্থানের দূরত্ব 2.5 মিটার এবং বগিটির সর্বোচ্চ বেগ 24 মিটার/সেকেন্ড।

যদি পৃথিবীর চুম্বকীয় ক্ষেত্রের লম্বিক উপাংশ 7×10^{-5} টেসলা হয় তবে রেল দুটির মধ্যে সর্বোচ্চ ভোল্টেজ কত হবে তা নির্ণয় কর

(A Wagon moves on two rails having a water tank in between them. The distance between the rails is 2.5 m and the highest speed attained by the wagon is 24 m/s. If the normal component of the earth's magnetic field is 7×10^{-5} Tesla, calculate the maximum voltage induced between the two rails).

সমাধান

রেল দুটির মধ্যে আবিষ্ট ভোল্টেজ হবে

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).\, d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).\, d\mathbf{l}$$

বা $\varepsilon = WvB$ এখানে $W = 2.5$ মিটার

$$= 2.5 \times 24 \times 7 \times 10^{-5}$$

$$= 4.2 \times 10^{-3} \text{ ভোল্ট}$$

২। একটি লম্বা সোজা তারে 10 Amp প্রবাহ প্রবাহিত হয় এবং চিত্রে প্রদর্শিত চতুর্ভুজ লুপের ধারে অবস্থিত। প্রবাহ বন্ধ করে দিলে 0.02 সেকেন্ডে শূন্য হয়। লুপে আবিষ্ট ই.এম.এফ. নির্ণয় কর এবং এর দিক নির্দেশ কর।

(A straight long wire carrying current 10 Amp is situated by the side of the rectangular loop. (figure). After stopping the current flow the induced E.M.F. become zero in 0.02 sec. Determine the induced E.M.F. in the loop and indicate its direction.

সমাধান

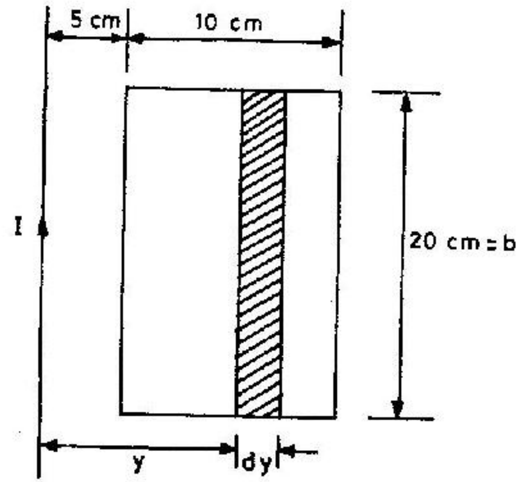
চিত্রে আচ্ছাদিত অংশের (যা চওড়া dy) সব বিন্দুতে চুম্বকীয় আবেশ $dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}$

অতএব আচ্ছাদিত অংশের মধ্য দিয়ে ফ্লাক্স হবে,

$$d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\, b\, dy$$

সমস্ত লুপ ব্যাপী ফ্লাক্স হবে

$$\phi = \int d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \int_{0.05}^{0.15} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} Ib \ln 3$$



তাহলে লুপে আবিষ্ট ই.এম.এফ. হবে

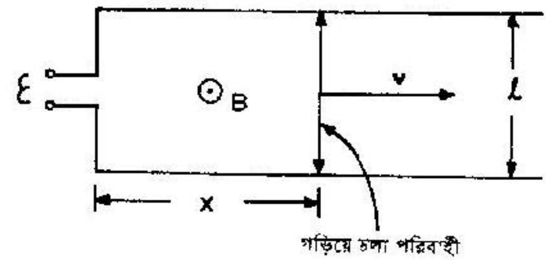
$$\varepsilon = \frac{\phi}{\tau} = \frac{\mu_0 Ib \ln 3}{2\pi\tau} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 0.2 \times \ln 3}{2\pi \times 0.02}$$

$$= 22 \times 10^{-6} \text{ V}$$

লুপের মধ্যেকার ফ্লাক্স হ্রাস প্রাপ্ত হচ্ছে। আবিষ্ট প্রবাহ অবশ্যই এর পরিবর্তনকে বাধা দেয়। আবিষ্ট প্রবাহ লুপে ঘড়ির কাঁটার দিকে প্রবাহিত হয়।

৩। নিম্নের চিত্রে একটি চতুর্ভুজ লুপ দেয়া আছে। লুপের চওড়া e অপরিবর্তী কিন্তু গড়িয়ে চলা পরিবাহীকে v সুষম বেগে সরানোর জন্য দৈর্ঘ্য x সময়ের সাথে বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। ফ্লাক্স ঘনত্ব **B** সর্বত্র একই (লুপের তলের উপর লম্ব) এবং সময়ের প্রেক্ষিতে অপরিবর্তী লুপটিতে আবিষ্ট মোট ই.এম.এফ বের কর।

(As given in the figure below a rectangular loop is shown. The width of the loop is fixed but the length x is increased due to displace the rolling conductor with uniform velocity. The flux density **B** is the same in all the space and is perpendicular to the plane of the loop and is not changing with time. Find out the total E.M.F. induced in the loop).



চিত্র : গড়িয়ে চলা পরিবাহী।

সমাধান

এখানে সমস্ত ই.এম.এফ. আবিষ্ট হবে দৈর্ঘ্যের চলমান পরিবাহীতে।

অতএব $$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}.ds = -\mathbf{B}l\frac{dx}{dt} = -\mathbf{B}l\mathbf{V}$$

৪। ৩নং সমস্যার জন্য চিত্রে প্রদর্শিত একই লুপ আবার বিবেচনা করি। ফ্লাক্স ঘনত্ব লুপের তলের উপর লম্ব এবং সর্বত্রই সুষম। গড়িয়ে চলা পরিবাহী সুষম বেগ v তে সরে যায়। ফ্লাক্স ঘনত্ব **B** সময়ের সাথে নিম্নরূপে ছন্দিতভাবে পরিবর্তিত হয়।

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos \omega t$$

লুপে আবিষ্ট মোট ই.এম.এফ. বের কর।

(Consider the same loop as shown in problem 3. Flux density **B** is perpendicular to the plane of the loop and is uniform every where. The rolling conductor displaces with uniform velocity. The flux density **B** changes harmonically with time in the following manner. Determine the total E.M.F. induced in the loop)

সমাধান

এখানে গতি ও সময় পরিবর্তনশীল **B** উভয়েই জড়িত। গতির জন্য ই.এম.এফ হবে

(১) $$\varepsilon_m = \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, dl$$

$$= \mathbf{V}\mathbf{B}l = \mathbf{V}l\mathbf{B}_0 \cos\omega t \qquad (১)$$

এখন সময় – পরিবর্তনশীল **B** এর জন্য ই.এম.এফ. হবে

(২) $$\varepsilon_t = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, ds = \omega x l\, \mathbf{B}_0 \sin\omega t \qquad (২)$$

অতএব মোট ই.এম.এফ. হবে (১) ও (২) এর যোগফল

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, dl + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, ds$$

$$= V B_0 l \cos\omega t + \omega x \, l B_0 \sin\omega t$$

$$= B_0 l \sqrt{V^2 + (\omega x)^2} \ \sin(\omega t + \delta)$$

যেখানে $\delta = \tan^{-1}(V/wx)$

• x = লুপের তাৎক্ষণিক দৈর্ঘ্য।

৫। একটি লম্বা বাতাস অন্তর্বস্তু সলিনয়েড জড়ানো হয়েছে প্রতি মিটারে ৫০০ পাক দ্বারা এবং এর প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল ২০ সে.মি.। সলিনয়েডের মাঝখানে ৪০০ পাক দ্বারা জড়ানো হয়েছে। সলিনয়েড এবং মাধ্যমিক জড়ানোর (Secondary winding) মধ্যে পারস্পরিক আবেশ নির্ণয় কর।

(A long air-cored solenoid is wound with 500 turns and its area of cross-section is 20 cm^2. The middle of the solenoid has been wound with 400 turns. Calculate the mutual inductance between the solenoid and the secondary winding.)

সমাধান

I_1 প্রবাহ বহনকারী একটি লম্বা বাতাস অন্তর্বস্তু সলিনয়েডের কেন্দ্রে চুম্বকীয় আবেশ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I_1}{L}$$

A প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সলিনয়েডের একটি অংশের মধ্য দিয়ে ফ্লাক্স $\phi = \mathbf{B}A$, অতএব সলিনয়েডের কেন্দ্রে n পাকবিশিষ্ট মাধ্যমিক জড়ানোর মধ্য দিয়ে মোট ফ্লাক্স

$$n\phi = n\mathbf{B}A = \mu_0 nNA \frac{dI_1/dt}{L}$$

কিন্তু $$\varepsilon_2 = -\frac{M\,dI_1}{dt}$$

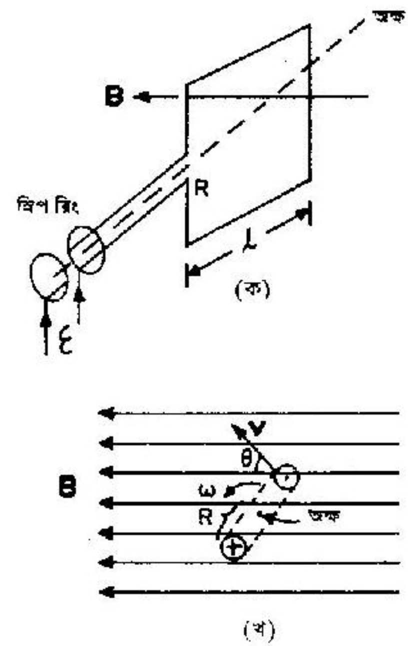
$$\therefore \quad M = \frac{\mu_0 NnA}{L} = 4\pi \times 10^{-7} \times 400 \times 500 \times 20 \times 10^{-4}$$

$$= 503 \times 10^{-6}\ \text{H}$$

$$= 503\ \mu\text{H}$$

৬। স্থির চুম্বকীয় ক্ষেত্রে একটি ঘূর্ণায়মান চতুর্ভুজ লুপ বিবেচনা করি (নিম্নের চিত্র)। লুপটি সুষম কৌণিক বেগ w তে ঘুরে। এই ব্যবস্থাকে একটি সরল a–c জেনারেটর হিসেবে ধরা যায় এবং আবিষ্ট ই.এম.এফ. স্লিপ রিং এর সাথে সংযুক্ত প্রান্তে আবির্ভাব হয়। লুপের ব্যাসার্ধ যদি R এবং দৈর্ঘ্য l হয় তবে মোট আবিষ্ট ই.এম.এফ. বের কর।

(Consider a rotating rectangular loop in a steady magnetic field as shown in the Figure. The loop rotates with a uniform angular velocity w. This arrangement represents a simple a–c generator, the induced EMF appearing at terminals connected to the slip rings. If the radius of the loop is R and its length l find the total EMF induced.)



চিত্র : a–c জেনারেটর (ক) যথার্থ দৃশ্য (খ) প্রস্থচ্ছেদ অক্ষের উপর লম্ব।

সমাধান

এখানে শুধু গতি বিবেচ্য বিষয়। অতএব মোট ই.এম.এফ. হবে

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}).\, d\mathbf{l} = 2UBl \sin\theta \qquad (১)$$

যেহেতু $\theta = \omega t, \quad \varepsilon = 2wRlB \sin\omega t \qquad (২)$

এখানে গুণক 2 এর আবির্ভাব হয়েছে কারণ ক্ষেত্রের মধ্য দিয়ে l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি পরিবাহী গতিশীল যাদের ই.এম.এফ. সাহায্যকারী হিসেবে কাজ করে। যেহেতু লুপের ক্ষেত্রফল $A = zRl$, অতএব সমীকরণ (২) নিম্নরূপ দাঁড়ায়,

$$\varepsilon = \omega BA \sin\omega t$$

৭। এখানে ৬নং সমস্যার ঘূর্ণায়মান লুপটি বিবেচনা করি। শুধু পরিবর্তন করা হয়েছে B কে যা সময়ের সাথে ছান্দিতভাবে নিম্নরূপে পরিবর্তিত হয়,

$$B = B_0 \sin\omega t$$

এরূপে $t = 0,\ B = 0$ এবং $\theta = 0$ (চিত্র খ) : মোট ই.এম.এফ. বের কর

(Consider the same rotating loop as in problem 6 with the modification that B varies harmonically with time as given by

$$B = B_0 \sin s\omega t$$

Thus when $t = 0$, $B = 0$, and $\theta = 0$ (Fig 6b). Determine the total EMF induced)

সমাধান

এখানে গতি ও **B** এর সময় পরিবর্তন উভয়ই আছে।

অতএব গতির জন্য ই.এম.এফ. হবে

$$\varepsilon_m = 2\omega R l B_0 \sin^2\omega t$$
$$= \omega R l B_0 - \omega R l B_0 \cos 2\omega t \qquad (১)$$

B এর সময় পরিবর্তনের জন্য ই.এম.এফ. হবে

$$\varepsilon_t = -2\omega R l B_0 \cos^2\omega t$$
$$= -\omega R l B_0 - \omega R l B_0 \cos 2\omega t \qquad (২)$$

মোট ই.এম.এফ. ε সমীকরণ (১) ও (২) এর যোগফল দ্বারা পাওয়া যাবে

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_t = -2\omega R l B_0 \cos 2\omega t$$

অতএব মোট ই.এম.এফ. হবে

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}.ds = -2RlB_0 \frac{d}{dt}(\sin\omega t \cos\omega t)$$
$$= -2\omega R l B_0 (\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)$$
$$= -2\,\omega R l B_0 \cos 2\omega t$$

প্রশ্নমালা

১। A ক্ষেত্রফল ও n–পাকবিশিষ্ট একটি কুণ্ডলী w কম্পনে একটি ব্যাসের চতুর্দিকে ঘুরে যা একটি সুষম চুম্বকীয় আবেশ **B** এর উপর লম্ব। কুণ্ডলীতে আবিষ্ট ই.এম.এফ. নির্ণয় কর।

(A coil of n turns and area A rotates with a frequency w about a diameter that is perpendicular to a uniform magnetic induction field B. Calculate the peak EMF induced in the Coil.)

২। বাতাসের মধ্যে অবস্থিত 4.0 মি:^{২} ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ৭ পাকের ফিলামেন্টারি তারের সুষম চুম্বকীয় আবেশ **B** তলের উপর লম্ব।

(ক) চুম্বকীয় ফ্লাক্স **B** যদি 14 ওয়েবার মি^{২} সে$^{-১}$ হারে পরিবর্তন করে তবে লুপের প্রান্তে ই.এম.এফ. বের কর।

(খ) লুপের প্রান্তে ই.এম.এফ. যদি 10V হয় তবে চুম্বকীয় ফ্লাক্স পরিবর্তনের হার নির্ণয় কর।

(A 7-turn loop of filamentary wire with 4 m^2 area situated in air has a uniform magnetic field B normal to the plane.)

(If the mgnetic flux density B changes at the rate of 14 wb/m^{-2} s^{-1}, find the EMF appearing at the terminals of the loop) (If the EMF at the loop terminals is 10 V, what is the rate of change of the magnetic field?)

৩। একটি সুষম চুম্বকীয় আবেশ **B** এর মান dB/dt ধ্রুব হারে পরিবর্তনশীল। m ভরবিশিষ্ট একখণ্ড তামাকে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তারে রূপান্তরিত করে তা দিয়ে R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তাকার লুপ তৈরি করা হলো। দেখাও যে লুপে আবিষ্ট প্রবাহ

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta} \cdot \frac{dB}{dt}$$

(এখানে ρ ও δ হলো যথাক্রমে তামার রোধকত্ব ও ঘনত্ব) এবং এটি তার বা লুপের আকারের উপর নির্ভরশীল নয়।

(A uniform field of induction B is changing in magnitude at a constant rate dB/dt. Given a mass m of copper to be drawn into a wire of radius r and formed into a circular loop of radius R, show that the induced current in the loop does not depend on the size of the wire or the loop and is given by

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta} \cdot \frac{dB}{dt}$$

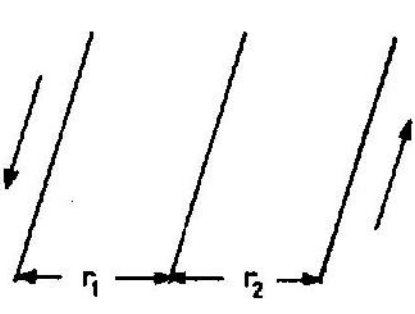
where ρ is the resistivity and δ is the density of Copper.)

৪। একটি 15 পাকবিশিষ্ট কুণ্ডলীর ক্ষেত্রফল 0.03 মি² এবং এটি একটি সুষম চুম্বকীয় ফ্লাক্স ঘনত্ব B = 0.3 ওয়েবার/মি² এ প্রতি সেকেন্ডে ৫০ বার ঘুরে। কুণ্ডলীর অক্ষ **B** এর উপর লম্ব। আবিষ্ট চরম ই.এম.এফ. নির্ণয় কর।

(A 15-turns Coil of 0.02 m^2 area rotates 50 rps in a uniform field of flux density B=0.3 wb/m^2. Find the peak induced EmF. The Coil axis is normal to B.)

৫। তিনটি সমান্তরাল তারের বাইরের দুটিতে প্রবাহ I = Im sinwt সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল এবং এটি একে অপরের বিপরীত দিকে। মাঝখানের পরিবাহীতে কোনো প্রবাহ নেই। তারগুলোকে অসীম লম্বা বলে ধরে নেয়া হয়েছে।

মাঝখানের তারটিতে প্রতি মিটার দৈর্ঘ্যে আবিষ্ট ই.এম.এফ. নির্ণয় কর।



(Find the potential induced per meter of length in the Centre wire of a three-wire parallel group as shown in the Figure. The Currents in the outer wires are sinusoidal and of the form I=I$_m$ sinwt, but in opposite direction. The centre conductor carries no current. The wires may be consider to be infinitely long.)

৬। একটি বর্তনীতে a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি পাতলা পরিবাহী খোলস আছে যার মধ্যে b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমান্তরালফিরতি তার আছে। যদি তারের সমস্ত প্রস্থচ্ছেদ ব্যাপী প্রবাহ

সুষমভাবে বন্টিত হয় তবে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে স্বাবেশ নির্ণয় কর। অভ্যন্তরীণ পরিবাহী যদি পাতলা ফাঁকা টিউব হয় তবে স্বাবেশ কত হবে?

(A circuit consists of a thin conducting shell of radius 'a' and a parallel return wire of raidus 'b' inside. If the current is assumed distributed uniformly throughout the cross section of the wire, Calculate the self inductance per unit length. What is the self-indectance if the inner conductor is a thin hollow tube?)

৭। 700 পাকবিশিষ্ট একটি টরোইডালের গড় ব্যাসার্ধ 10 সে:মি: এবং জড়ান তারের ব্যাসার্ধ 1 সে:মি:। গড় স্বাবেশ নির্ণয় কর যখন : (ক) বাতাস কোর (খ) লোহা কোর যার ভেদন যোগ্যতা 1000।

(A toroidal coil of 700 turns has a mean radius of 10 cm and a radius for the winding of 1 cm. What is the average self-inductance (a) with an air core and (b) with an iron core having a permeability of 1000.)

৮। r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি লম্বা সমান্তরাল তারের কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব d এবং এদের প্রান্তদেশ সংযোগ করে একটি বর্তনী তৈরি করা হয়েছে। প্রান্তফল ও তারের মধ্যেকার চুম্বকীয় ফ্লাক্স বাদ দিয়ে দেখাও যে সমান্তরাল তারের l দৈর্ঘ্যে স্বাবেশ হবে

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-r}{r}$$

(A current loop is made by connecting the ends of two long parallel wires of radius r separated by a distance d between Centres. Neglecting end effect and the magnetic flux withing the wires, show that the self-inductance of a length l of the parallel wire is

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-r}{r}$$

৯। যদি 10 অ্যাম্পিয়ার 50 Hz প্রবাহ একটি আদর্শ ট্রান্সফর্মারের প্রাথমিক কুণ্ডলীতে প্রয়োগ করে মাধ্যমিক কুণ্ডলীতে 90V ই.এম.এফ আবিষ্ট হয় তবে পারস্পরিক আবেশ নির্ণয় কর।

১০। একটি তারকে বাঁকা করে R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে পরিণত করে একে এমনভাবে বসান হয়েছে যেন এর কেন্দ্র একটি লম্বা সোজা তার হতে 2R দূরত্বে থাকে। এরা উভয়ে একই তলে অবস্থিত। দেখাও যে পারস্পরিক আবেশ হবে $0.268\ \mu_0 R$।

১১। নিবিড়ভাবে জড়ানো 300 পাকের কুণ্ডলীতে 12 অ্যাম্পিয়ার প্রবাহ মোট 15 ওয়েবার ফ্লাক্স উৎপন্ন করে। চুম্বকীয় ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ

(Maxwell's Equations)

৫.০ সূচনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলোতে আমরা তড়িৎ ও চুম্বকের স্থির অবস্থার সমস্যাবলী নিয়ে আলোচনা করেছি। তড়িৎ ও চুম্বকীয় ঘটনাকে সেখানে স্বতন্ত্র ঘটনা হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছে। কিন্তু যদি আমরা সময়সাপেক্ষ ঘটনাবলী নিয়ে আলোচনা করি তাহলে তড়িৎ ও চুম্বকের স্বতন্ত্র বৈশিষ্ট্য আর থাকে না। সময়সাপেক্ষ চুম্বকীয় ক্ষেত্র বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তৈরি করে এবং এর উল্টাটিও ঘটে থাকে। ফলে সেক্ষেত্রে আমরা তড়িৎ বা চুম্বকীয় ক্ষেত্রের পরিবর্তে তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্র বলব। এ অধ্যায়ে আমরা 'ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ' বলে একগুচ্ছ সমীকরণ পাবো যা তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করে।

৫.১ ম্যাক্সওয়েলের প্রথম সমীকরণ

গস–এর সূত্র আবদ্ধ তলের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতার প্রবাহকে (flux **E**) ঐ তলের মধ্যকার মোট চার্জের সাথে সম্পর্ক স্থাপন করে। ৫.১ চিত্রে একটি পয়েন্ট চার্জ Q কে একটি আবদ্ধ তল S এর P′ বিন্দুতে দেখানো হয়েছে। ক্ষুদ্র তল **da** এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতার প্রবাহ হবে :

$$\mathbf{E}.\mathbf{da} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}\cdot \mathbf{da}$$

এখানে ε_0 হলো মুক্ত স্থানের ভেদ্যতা এবং $\mathbf{r}_1.\mathbf{da}$ হলো $\mathbf{r}_1$ এর উপর লম্বিক একটি সমতলে **da** এর অভিক্ষেপণ (projection)। তাহলে আমরা লিখতে পারি :

$$\mathbf{E}.\mathrm{da} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$$

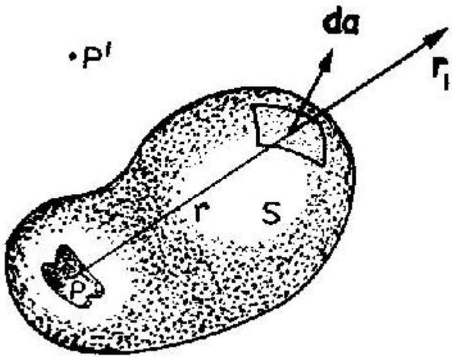
এখানে $d\Omega$ হলো P′ বিন্দুতে da দ্বারা গঠিত কঠিন কোণ (solid angle)।

বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতার মোট প্রবাহ পেতে হলে সমস্ত পৃষ্ঠদেশ ব্যাপী যোগ করতে হবে :

$$\int_S \mathbf{E}.\mathrm{da} = \int_\tau (\nabla.\mathbf{E})\,d\tau = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (৫.১)$$

এখানে উল্লেখ্য যে আয়তন τ তল s দ্বারা আবদ্ধ। সুপরিবাহী মাধ্যমের জন্য শুধু মুক্ত চার্জ কিন্তু ডাই-ইলেকট্রিক মাধ্যমের জন্য আবদ্ধ এবং মুক্ত উভয় প্রকার চার্জই Q–এর অন্তর্ভুক্ত থাকবে। কাজেই ডাই-ইলেকট্রিকের ক্ষেত্রে :

$$Q = \int_\tau (\rho + \rho')\,d\tau \qquad (৫.২)$$



চিত্র ৫.১ : একটি আবদ্ধ তল S এর মধ্যবর্তী P বিন্দুতে অবস্থিত একটি পয়েন্ট চার্জ Q।

এখানে ρ হচ্ছে মুক্ত চার্জের আয়তন ঘনত্ব এবং ρ' আবদ্ধ চার্জের আয়তন ঘনত্ব। উল্লেখ্য যে, ρ' নিরূপণে তলের উপরিভাগের আবদ্ধ চার্জসমূহকে আয়তনিক চার্জ হিসেবে গণ্য করতে হবে। যদি তলের উপরিভাগের আবদ্ধ চার্জসমূহ তলের অভ্যন্তরে পরিমেয় পুরুত্বব্যাপী বিস্তৃত থাকে এবং ঐগুলিকে আয়তনিক চার্জ হিসেবে গণ্য করা যায় তবে

$$\rho' = -\nabla.\mathbf{P} \tag{৫.২ক}$$

সমীকরণ (৫.১) ও (৫.২) থেকে পাওয়া যায় :

$$\int_\tau (\nabla.\mathbf{E})\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau (\rho + \rho')\, d\tau$$

উপরিউক্ত সমীকরণটির উভয় পাশের সমাকলনীয় রাশিদ্বয়ের (Integrands) সমতার ভিত্তিতে আমরা পাই

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \tag{৫.৩}$$

সমীকরণ (৫.৩) τ আয়তনের প্রতিটি বিন্দুতেই প্রযোজ্য। সমীকরণ (৫.২ক) থেকে ρ' এর মান (৫.৩) এ প্রয়োগ করে

$$\varepsilon_0 (\nabla.\mathbf{E}) = \rho - \nabla.\mathbf{P}$$

বা
$$\nabla.(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \tag{৫.৪}$$

(৫.৪) সমীকরণ বিশেষভাবে তাৎপর্যপূর্ণ, কারণ এটি থেকে দেখা যায় যে $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ এমন একটি ভেক্টর যার অপসারিতা (divergence) শুধু মুক্ত চার্জ ঘনত্ব ρ এর উপর নির্ভরশীল। এই ভেক্টরটিকে বৈদ্যুতিক সরণ (Electric displacement vector) বলা হয় এবং একে **D** দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{৫.৫}$$

অতএব $$\nabla . \mathbf{D} = \rho \qquad (৫.৬)$$

এই সমীকরণটি গসের সূত্রের সাধারণ অবয়ব। এটি যে কোনো ডাই-ইলেকট্রিক এবং শূন্য মাধ্যমে প্রযোজ্য। একে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চুম্বকীয় চারটি মৌলিক সমীকরণের প্রথম সমীকরণও বলা হয়।

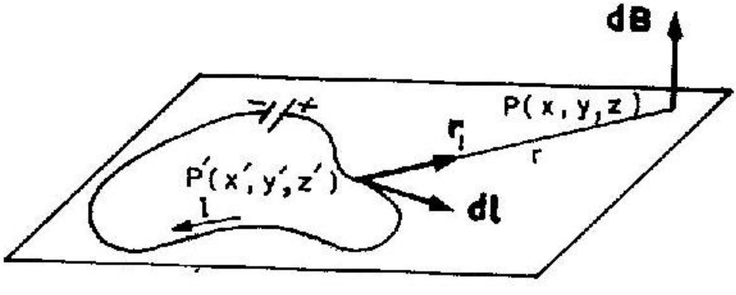
৫.২ ম্যাক্সওয়েলের দ্বিতীয় সমীকরণ

বায়োট-সাভার্ট এর সূত্র অনুসারে

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{dl \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৫.৭)$$

অতএব $$\nabla . \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla . \oint_c \frac{dl \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৫.৮)$$

এখানে $\mathbf{B}$ হচ্ছে $P(x,y,z)$ ক্ষেত্র বিন্দুতে চুম্বকীয় আবেশ এবং পরিবাহীর ক্ষুদ্র অংশ dl (যার মধ্য দিয়ে বৈদ্যুতিক প্রবাহ I) উৎস বিন্দু $P'(x', y', z')$ তে অবস্থিত (চিত্র ৫.২)।



চিত্র ৫.২ : উৎসবিন্দু $P'(x', y', z')$-এ অবস্থিত বৈদ্যুতিক ক্ষুদ্রাংশ Idl ক্ষেত্রবিন্দু $P(x, y, z)$ -তে চুম্বকীয় আবেশের ক্ষুদ্রাংশ dB উৎপন্ন করে। এখানে $\mathbf{r}_1$ হচ্ছে P' হতে P -এর দিকে একক অবস্থান ভেক্টর।

(৫.৮) সমীকরণে এটি স্পষ্ট যে $\frac{dl \times \mathbf{r}_1}{r^2}$ ভেক্টরের জন্য অপসারিতা এবং যোজন কারকদ্বয় পাশাপাশি অবস্থিত কিন্তু এদের অবস্থান বিনিময়যোগ্য।

কাজেই $$\nabla . \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \nabla . \left(\frac{dl \times \mathbf{r}_1}{r^2}\right) \qquad (৫.৯)$$

এখন ১.১২ অনুচ্ছেদের ৫নং ভেক্টর সূত্র অনুসারে

$$\nabla . \left(\frac{dl \times \mathbf{r}_1}{r^2}\right) = \frac{\mathbf{r}_1}{r^2} . (\nabla \times dl) - dl . \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}_1}{r^2}\right) \qquad (৫.১০)$$

(৫.১০) সমীকরণের দক্ষিণ পার্শ্বস্থ প্রথম পদের মান শূন্য কারণ, dl উৎস বিন্দু $P'(x',y',z')$ এর উপর নির্ভরশীল এবং ∇–অপারেটর ক্ষেত্রবিন্দু $P(x,y,z)$–এর ডেরিভেটিভের সাথে জড়িত। অর্থাৎ $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\delta x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ এবং $\mathbf{dl} \Rightarrow f(x',y',z')$ । দক্ষিণ পাশের দ্বিতীয় পদের মানও শূন্য।

কারণ $$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (৫.১১)$$

যেহেতু গ্রাডিয়েন্টের কার্ল সব সময়ই শূন্য। এরূপ (৫.১০) সমীকরণের দক্ষিণ পাশের উভয় পদের মানই শূন্য। কাজেই (৫.৮) সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে $\nabla.\mathbf{B}$ –এর মান সব সময়ই শূন্য।

অর্থাৎ $$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad (৫.১২)$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের দ্বিতীয় সমীকরণ।

৫.৩ ভেক্টর বিভব A (The Vector Potential A)

বায়োট–সাভার্টের সূত্র অনুসারে ২ নং চিত্রে প্রদর্শিত P ক্ষেত্র বিন্দুতে চুম্বকীয় আবেশ B–এর প্রকাশ নিম্নরূপ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_c \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \qquad (৫.১৩)$$

১.১২ অনুচ্ছেদের ১৬ নং ভেক্টর সূত্রানুসারে

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (৫.১৪)$$

এখানে গ্রাডিয়েন্ট ক্রিয়া বলতে ক্ষেত্র বিন্দু P–এর স্থানাংক x,y,z–এর সাপেক্ষে বিয়োজন (differentiation) বুঝায়। অতএব

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_c \mathbf{dl} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

বা $$\mathbf{B} = +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_c \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \mathbf{dl} \qquad (৫.১৫)$$

১.১২ অনুচ্ছেদের ৯ নং ভেক্টর অভেদ প্রয়োগ করে (৫.১৫) সমীকরণকে নিম্নরূপে রূপান্তরিত করা যায় :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint_c \left(\nabla \times \frac{\mathbf{dl}}{r}\right) - \oint_c \frac{1}{r}(\nabla \times \mathbf{dl})\right] \qquad (৫.১৬)$$

এখানে $\frac{1}{r}$ কে স্কেলার ফাংশন এবং dl কে ভেক্টর ফাংশন হিসেবে গণ্য করা হয়েছে। এক্ষেত্রেও কিন্তু কার্ল অপারেটরদ্বয় ক্ষেত্র বিন্দু P–এর স্থানাংক x,y,z এর সাথে সম্পর্কযুক্ত।

যেহেতু $d\mathbf{l}$ স্থানাংক (x,y,z) এর কোনো ফাংশন নয়, সেহেতু $\nabla \times d\mathbf{l}$ অবশ্যই শূন্য হবে। অতএব

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{l}}{r} \right) \qquad (৫.১৭)$$

পুনরায় উল্লেখ্য যে (৫.১৭) সমীকরণে ব্যবকলন (differentiation) এবং সংকলনদ্বয়ের (intergration) ক্রম বিনিময়যোগ্য।

এরূপ

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \left(\oint_c \frac{d\mathbf{l}}{r} \right)$$

$$= \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\mathbf{l}}{r} \right)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} \qquad (৫.১৮)$$

যেখানে

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\mathbf{l}}{r} \qquad (৫.১৯)$$

এবং $\mathbf{A}$-কে ভেক্টর বিভব বলা হয়। এর একক ওয়েবার/মিটার। যদি তড়িৎ প্রবাহের ঘনত্ব $\mathbf{J}$ সহযোগে বিস্তৃত থাকে তাহলে

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\mathbf{J}\, d\tau}{r} \qquad (৫.২০)$$

সমীকরণ (৫.১৮) $\mathbf{B}$ ও $\mathbf{A}$ –এর মধ্যে সম্পর্কের একটি সম্পূর্ণ সাধারণ অবয়ব এবং এটি সকল অবস্থায়ই (এমনকি সময়ের সাথে নির্ভরশীল তড়িৎ প্রবাহ কিংবা পরিবাহীর অভ্যন্তরে সকল বিন্দু যেখানে তড়িৎ প্রবাহ ঘনত্ব পরিমেয়) সত্য।

৫.৪ ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ

ফ্যারাডের তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশের সূত্র অনুসারে

$$\oint_l \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B}.d\mathbf{a} \qquad (৫.২১)$$

যেখানে s হলো l দ্বারা আবদ্ধ যে কোনো তল, $\mathbf{E}$ – আবেশীয় বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা এবং $\mathbf{B}$ –চুম্বকীয় আবেশ। (৫.২১) সমীকরণের বাম পাশে স্টোকের মতবাদ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\oint_l \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \int_s (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} \qquad (৫.২২)$$

এখন (৫.২১) ও (৫.২২) থেকে পাওয়া যায়

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B}.\, d\mathbf{a} \qquad (৫.২৩)$$

শূন্য মাধ্যমে এবং $\mathbf{E}$ ও $\mathbf{B}$ একই কো-অর্ডিনেট পদ্ধতিতে পরিমাপের শর্ত সাপেক্ষে উপরিউক্ত সমীকরণের দক্ষিণ পাশের যোজন-বিয়োজন ক্রিয়ার ক্রম পরস্পর বিনিময়যোগ্য। কাজেই

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} \qquad (৫.২৪)$$

এখানে $\mathbf{B}$ -এর আংশিক ডেরিভেটিভ নেয়া হয়েছে কারণ এক্ষেত্রে সময়ের সাপেক্ষে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে $\mathbf{B}$-এর পরিবর্তনের হার বিবেচনা করা দরকার। যেহেতু সমীকরণ (৫.২৪) যে কোনো ধরনের তলের জন্য প্রযোজ্য সুতরাং উভয় পাশের সমাকলনীয় রাশিদ্বয় সকল বিন্দুতেই পরস্পর সমান। অতএব

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (৫.২৫)$$

এটিই হচ্ছে ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ। উল্লেখ্য যে (৫.২৫) সমীকরণ হচ্ছে একটি ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ এবং ঐ একই বিন্দুতে চুম্বকীয় আবেশ $\mathbf{B}$ কে সম্পর্কযুক্ত করে।

৫.৫ ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ সহযোগে আবিষ্ট বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ (The induced electric field intensity $\mathbf{E}$ in terms of the vector potential $\mathbf{A}$)

পরিবর্তনশীল চৌম্বক ক্ষেত্র দ্বারা আবিষ্ট বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$, ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা যেতে পারে। সম্পর্কটি নিচে বর্ণিত হলো। ৫.৩ অনুচ্ছেদে দেখানো হয়েছে।

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (৫.২৬)$$

আবার ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ হলো

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad [\text{৫.২৫ দ্রষ্টব্য}]$$

সুতরাং সমীকরণ (৫.২৬) ও (৫.২৫) থেকে আমরা পাই

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \qquad (৫.২৭)$$

অন্তরকলনের ক্রম পরিবর্তন করে

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

বা $$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \qquad (৫.২৮)$$

অর্থাৎ $\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$ ভেক্টরটির কার্ল শূন্য। কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে সেই ভেক্টরকে একটি স্কেলার ফাংশনের গ্রাডিয়েন্ট হিসেবে প্রকাশ করা যেতে পারে। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \qquad (৫.২৯)$$

উল্লেখ্য, স্কেলার ফাংশনটি নির্ধারণের সময় বিবেচনা করা হয়েছে যেন স্থির বৈদ্যুতিক প্রবাহের জন্য $\mathbf{E} = -\nabla V$ হয়।

৫.৬ ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ

চুম্বকীয় মাধ্যমের জন্য অ্যাম্পিয়ারের সূত্রের পরিবর্তিত রূপ নিম্ন আকারে লেখা যায়,

$$\oint_c \mathbf{H}.d\mathbf{l} = I$$

উপরিউক্ত সমীকরণে বামপাশে স্টোকের মতবাদ প্রয়োগ করে

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}).\, d\mathbf{a} = I \qquad (৫.৩০)$$

এখানে s তল c পথ দ্বারা আবদ্ধ। s তলের প্রতিটি বিন্দুতে বৈদ্যুতিক প্রবাহ ঘনত্ব $\mathbf{J}$ হলে, c পথ দ্বারা আবদ্ধ বৈদ্যুতিক প্রবাহ I হবে,

$$I = \int_s \mathbf{J}.\, d\mathbf{a} \qquad (৫.৩১)$$

(৫.৩০) ও (৫.৩১) থেকে

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}).\, d\mathbf{a} = \int_s \mathbf{J}.\, d\mathbf{a} \qquad (৫.৩২)$$

উপরের সমীকরণের সংকলনদ্বয় s তলের যে কোনো বিন্দুতে পরস্পর সমান। অর্থাৎ

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (৫.৩৩)$$

উভয় পার্শ্বে অপসারিতা নিয়ে

$$\nabla.(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla.\mathbf{J} = 0 \qquad (৫.৩৪)$$

যেহেতু কার্লের অপসারিতা সর্বদাই শূন্য। চার্জের নিত্যতার সূত্র $\left(\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$ হতে আমরা দেখতে পাই যে সমীকরণ (৫.৩৩) কেবল চার্জ ঘনত্ব ρ এর স্থির অবস্থার জন্য প্রযোজ্য। কিন্তু চার্জ ঘনত্ব ρ যদি সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল হয় তবে সেক্ষেত্রে সমীকরণটি চার্জ ঘনত্ব ρ এর নিত্যতার সূত্রের সাথে অসঙ্গতিপূর্ণ অর্থাৎ (৫.৩৩) সমীকরণ চার্জ ঘনত্ব ρ এর অস্থির অবস্থার জন্য প্রযোজ্য নয়। সুতরাং (৫.৩৩) সমীকরণকে চার্জের নিত্যতার সমীকরণের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ করার জন্য ম্যাক্সওয়েলই প্রথম উক্ত সমীকরণের সংশোধিত রূপ প্রদান করেন যা নিম্নে প্রদত্ত হলো :

$$\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{D}) \qquad [\text{ সমীকরণ (৫.৬) অনুসারে }]$$

$$= -\nabla.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

বা $$\nabla.\mathbf{J} + \nabla.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

বা $$\nabla.\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (৫.৩৫)$$

উপরের সমীকরণে দেখা যায় যে ভেক্টর $\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$–এর অপসারিতার মান শূন্য, কিন্তু আমরা জানি, যে কোনো ভেক্টরের কার্লের অপসারিতা সর্বদাই শূন্য ; অতএব $\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$ –কে যে কোনো ভেক্টরের কার্লরূপে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ $$\nabla \times \mathbf{C} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৫.৩৬)$$

এখানে $\mathbf{C}$ হচ্ছে যে কোনো একটি ভেক্টর। উল্লেখ্য যে, (৫.৩৬) সমীকরণটি হচ্ছে চার্জ ঘনত্ব ρ এর অস্থির অবস্থার জন্য প্রযোজ্য। এখন $\mathbf{C}$ ভেক্টরটি এমন একটি ভেক্টর হওয়া বাঞ্ছনীয় যাতে ρ এর স্থির অবস্থার জন্য (৫.৩৬) সমীকরণটি (৫.৩৩) সমীকরণের রূপ ধারণ করে। এ শর্তে অবশ্যই $\mathbf{C} = \mathbf{H}$ হবে।

অতএব (৫.৩৬) সমীকরণের রূপ দাঁড়ায় :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৫.৩৭)$$

এ সমীকরণটি হচ্ছে ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণের সাধারণ রূপ। $\mathbf{J}$ –পরিবহণ প্রবাহ ঘনত্ব এবং $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ সরণ প্রবাহ ঘনত্ব। সমীকরণ (৫.৩৩) ও (৫.৩৭) থেকে আমরা দেখতে পাই যে, (৫.৩৩) সমীকরণে শুধু $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ পদটি অন্তর্ভুক্ত করে সমীকরণ (৫.৩৭) পাওয়া যায়। $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ পদটির অন্তর্ভুক্তিকেই ম্যাক্সওয়েলের স্বীকার্য বলা হয়। ম্যাক্সওয়েল তাঁর এই স্বীকার্যের সাহায্যে বিখ্যাত তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সূত্র বের করেছেন।

৫.৭ চার্জের সংরক্ষণশীলতা ও অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ (The Conservation of Charge and the Equation of Continuity)

ধরা যাক s একটি তল যা $\mathbf{J}$ প্রবাহ ঘনত্ব বহনকারী একটি সুপরিবাহকের অন্তর্ভুক্ত τ আয়তনকে আবদ্ধ করে। অদ্যাবধি সকল পরীক্ষা-নিরীক্ষার ফলাফল অনুসারে এটি প্রমাণিত যে, চার্জ সর্বদাই সংরক্ষণশীল। অতএব s তল ভেদকারী $\mathbf{J}$ এর বহির্মুখী ফ্লাক্স, অবশ্যই τ আয়তনে চার্জ হারানোর হারের সমান হবে। অর্থাৎ

$$\oint_s \mathbf{J}.\,d\mathbf{a} = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\tau \qquad (৫.৩৮)$$

এখানে ρ খাঁটি চার্জ ঘনত্ব। সমীকরণে (৫.৩৮) কে অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ বলা হয় এবং এটি সংকলন অবয়বে বর্ণিত।

(৫.৩৮) সমীকরণের বামপার্শ্বে অপসারিতা মতবাদ (Divergence theorem) প্রয়োগ করে

$$\oint_S \mathbf{J}.\mathrm{da} = \int (\nabla.\mathbf{J})\, d\tau \qquad (৫.৩৯)$$

অতএব (৫.৩৮) ও (৫.৩৯) থেকে পাই,

$$\int_\tau (\nabla.\mathbf{J})\, d\tau = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau \qquad (৫.৪০)$$

এ সমীকরণ যে কোনো τ আয়তনের জন্যই প্রযোজ্য। সুতরাং সংকলদ্বয়ের মান সমান হবে। অর্থাৎ যে কোনো বিন্দুতে আমরা পাই,

$$\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (৫.৪১)$$

এটিই চার্জের সংরক্ষণশীলতার সূত্র যা অন্তরকলন অবয়বে বর্ণিত।

৫.৮ সরণ প্রবাহ (Displacement Current)

আমরা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দেখেছি যে, স্থির ক্ষেত্রের বেলায় একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে $\mathbf{H}$ ভেক্টরের কার্ল, প্রবাহ ঘনত্ব $\mathbf{J}$ এর সমান। এই প্রবাহ ঘনত্ব (যা প্রকৃত চার্জ যথা : ইলেকট্রন ও আয়নের গতির জন্য সৃষ্ট) কে পরিবহণ প্রবাহ ঘনত্ব বলা হয়। স্পষ্টত যদি $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল ক্ষেত্রের বেলাতেও প্রযোজ্য হয় তবে $\nabla.\mathbf{J} = \nabla.(\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ কিন্তু এটি অবিচ্ছিন্নতা সমীকরণের (৫.৩৮) সাথে অসামঞ্জস্যপূর্ণ, সুতরাং জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েলের স্বীকার্য অনুসারে

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D \qquad (৫.৪২)$$

এখানে $\mathbf{J}_D$ সরণ প্রবাহ ঘনত্ব এবং $\mathbf{J}_D$ এর সংজ্ঞা হচ্ছে সময়ের সাথে বৈদ্যুতিক সরণের পরিবর্তনের হার , অর্থাৎ

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৫.৪৩)$$

পরিবহণ প্রবাহের সাথে সরণ প্রবাহ যুক্ত করলে অবিচ্ছিন্নতা সমীকরণ পরিতৃপ্ত হয় ; যথা

$$\nabla.(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla.\mathbf{J} + \nabla.\mathbf{J}_D$$

বা $$0 = \nabla.\mathbf{J} + \nabla.\mathbf{J}_D$$

বা $$\nabla.\mathbf{J} = -\nabla.\mathbf{J}_D$$

$$= -\nabla.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{D})$$

$$\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [\because \nabla.\mathbf{D} = \rho] \qquad (৫.৪৪)$$

একটি খোলা তলের মধ্যে পরিবহণ ও সরণ প্রবাহকে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করা যায় :

$$i = \int_S \mathbf{J}.d\mathbf{a}, \quad i_D = \int_S \mathbf{J}_D.\,d\mathbf{a} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\,d\mathbf{a}$$

সরণ প্রবাহ i_D কে চার্জের গতি সহযোগেও ব্যাখ্যা করা যায়। Q চার্জের বেগ যদি **V** হয় তবে Q চার্জকে ঘিরে সৃষ্ট বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের বেগও **V** হবে। অতএব যদিও Q চার্জ প্রকৃতপক্ষে $_S$তল অতিক্রম করে না তবুও সরণ প্রবাহ পাওয়া যায়, কারণ **D** এর বলরেখাগুলি $_S$ তল ধরে পরিবর্তিত হতে থাকে। সরণ প্রবাহ নিচু কম্পনের ক্ষেত্রে খুব একটা গুরুত্বপূর্ণ নয় কারণ সেখানে পরিবাহীর মধ্যকার সাধারণ প্রবাহ ঘনত্ব অনেক বেশি থাকে। কম্পন বৃদ্ধির সাথে সাথে এর গুরুত্ব অনুভূত হতে থাকে। পরবর্তী অধ্যায়গুলিতে দেখা যাবে যে, এই রাশি ফ্যারাডের আবেশীয় প্রবাহ ক্ষেত্রের সাথে যুক্ত হয়ে তরঙ্গ সঞ্চারণ, অনুনাদ (resonance) এবং বিকিরণের পূর্বাভাস প্রদান করে।

৫.৯ ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলোর উপর সাধারণ আলোচনা

কয়েকটি মৌলিক গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার জন্য এই অনুচ্ছেদে আমরা ম্যাক্সওয়েলের চারটি সমীকরণ এক সাথে আলোচনা করব। এখন ম্যাক্সওয়েলের চারটি সমীকরণ :

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho \tag{৫.৪৫}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{৫.৪৬}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{৫.৪৭}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \tag{৫.৪৮}$$

যেখানে **D** – বৈদ্যুতিক সরণ (কুলম্ব/মিটার^2)

B – চুম্বকীয় আবেশ (ওয়েবার/মিটার^2)

E – বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা (ভোল্ট/মিটার)

H – চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতা (অ্যাম্পিয়ার/মিটার)

ρ – মুক্ত চার্জ ঘনত্ব (কুলম্ব/ মিটার^3)

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ – সরণ প্রবাহ ঘনত্ব (অ্যাম্পিয়ার/মিটার^2), এখানে পরিবহণ ও পরিচালন উভয় প্রকার ঘনত্বকেই বুঝানো হয়েছে।

ওহমের সূত্র মেনে চলে এমন ধরনের যে কোনো পরিবাহীর জন্য উৎসের বাইরে সকল বিন্দুতে

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{৫.৪৯}$$

σ – পরিবাহীর পরিবাহকত্ব (ওহম-মিটার$^{-1}$)।

উৎস (যথা একটি ব্যাটারি) –এ অভ্যন্তরে শক্তির স্থানীয় উৎপত্তির কারণে উদ্ভূত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}_s$ পাওয়া যাবে এবং সেক্ষেত্রে

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) \tag{৫.৫০}$$

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলো হচ্ছে ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ ও $\mathbf{H}$ এর স্থান ডেরিভেটিভ, $\mathbf{B}$ ও $\mathbf{D}$ এর সময় ডেরিভেটিভ, মুক্ত চার্জ ঘনত্ব ρ এবং প্রবাহ ঘনত্ব $\mathbf{J}$ সমন্বয়ে গঠিত আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ। অবশ্য ক্ষেত্র ভেক্টর এই সমীকরণগুলি থেকে সরাসরি পাওয়া যায় না ; কিন্তু বিবেচ্য ক্ষেত্রের জন্য প্রযোজ্য সীমান্ত শর্ত সহযোগে সংকলন করলে সহজেই ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ পাওয়া যায়। যেহেতু সমীকরণগুলি রৈখিক, একটি মাধ্যমে প্রতিটি চার্জ অথবা প্রবাহ বিন্যাস আলাদাভাবে নিজস্ব ক্ষেত্র উৎপন্ন করে। যথা : কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ ঐ বিন্দুতে বিভিন্ন উৎসের কারণে সৃষ্ট $\mathbf{E}$ এর ভেক্টর সমষ্টি। এটিই উপরিপাতন (superposition) নীতি। ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি হলো তড়িৎ চুম্বকীয় চারটি মৌলিক সমীকরণ। সমীকরণগুলি সম্পূর্ণভাবে সাধারণ এবং কেবল মাধ্যমের স্থিরতার শর্ত সাপেক্ষে (মাধ্যমটি অসমসত্ত্ব, অরৈখিক এমনকি অদিক নিরপেক্ষ হলেও) সব ধরনের তড়িৎ চুম্বকীয় ঘটনাবলীর জন্য প্রযোজ্য। কার্তেসীয় (Cartesian) স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহের অদিকবর্তী অবয়ব :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \tag{৫.৫১}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \tag{৫.৫২}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{৫.৫৩}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \tag{৫.৫৪}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{৫.৫৫}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial D_x}{\partial t} = J_x \tag{৫.৫৬}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial D_y}{\partial t} = J_y \tag{৫.৫৭}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial D_z}{\partial t} = \mathbf{J}_z \tag{৫.৫৮}$$

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি একটি অন্যটির উপর নির্ভরশীল যা নিচে দেখানো হলো। এখন (৫.৪৭) সমীকরণের অপসারিতা নিলে :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla . (\nabla.\mathbf{E}) = -\nabla . \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা $$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{B})$$

বা $$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{B}) = 0 \tag{৫.৫৯}$$

$\therefore$ $$\nabla.\mathbf{B} = C \qquad \text{[সংকলন করে]}$$

C সংকলন ধ্রুবক যা সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়। ধরা যাক, মাধ্যমের সকল বিন্দুতেই একটি নির্দিষ্ট সময়ে $\nabla.\mathbf{B} = 0$, তাহলে সংকলন ধ্রুবক C এর মান সকল সময়ের জন্যই শূন্য হবে। অতএব সর্বদা সর্বাবস্থায় $\nabla.\mathbf{B} = 0$ । এভাবে সমীকরণ (৫.৪৭) থেকে সমীকরণ (৫.৪৬) পাওয়া যায় এবং এই সমীকরণদ্বয়কে কখনো কখনো ম্যাক্সওয়েলের **প্রথম যুগল সমীকরণ** বলা হয়। একইভাবে সমীকরণ (৫.৪৮) এর অপসারিতা নিলে

$$\nabla.(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla.\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

বা $$0 = \nabla.\mathbf{J} + \nabla.\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

বা $$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{D}) = -\nabla.\mathbf{J}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [\text{(৫.৪১) সমীকরণ অনুসারে}]$$

সুতরাং সময়ের সাপেক্ষে সংকলন করে আমরা পাই,

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{D})\,dt = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt$$

বা $$\nabla.\mathbf{D} = \rho + C \tag{৫.৬০}$$

এখানেও C সংকলন ধ্রুবক যা সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়।

ধরা যাক, মাধ্যমের যে কোনো বিন্দুতে কোনো এক সময়ে $\nabla.\mathbf{D}$ এবং ρ এর মান শূন্য। এই শর্তাধীনে $C = 0$ । অতএব $\nabla.\mathbf{D} = \rho$ । এরূপে সমীকরণ (৫.৪৮) থেকে সমীকরণ (৫.৪৫) পাওয়া যায় এবং এদেরকে ম্যাক্সওয়েলের দ্বিতীয় যুগল সমীকরণ বলা হয়।

(৫.৪৫), (৫.৪৬), (৫.৪৭) ও (৫.৪৮) এ $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$

এবং $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{m}$ বসালে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি নিম্নরূপ ধারণ করে :

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla.(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

∴ $$\nabla.\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla.\mathbf{P}) \tag{৫.৬১}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{৫.৬২}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{৫.৬৩}$$

এবং $$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{m}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{J}$$

বা $$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \times \mathbf{m} - \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

বা $$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \nabla \times \mathbf{m} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{m}\right) \qquad (৫.৬৪)$$

উল্লেখ্য $\mathbf{P}$ পোলারায়ন ভেক্টর (কুলম্ব/মিটার^2) এবং $\mathbf{m}$ একটি চৌম্বক মাধ্যমে চুম্বকায়ন ভেক্টর (অ্যাম্পিয়ার-পাক/মিটার), এই দুটি রাশি বিবেচ্য বিন্দুতে বস্তুর উপস্থিতি নির্দেশ করে।

(৫.৬১), (৫.৬২), (৫.৬৩) ও (৫.৬৪) সমীকরণগুলিও ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের সম্পূর্ণভাবে সাধারণ রূপ যেখানে মাধ্যমের অবদান অন্তর্ভুক্ত রয়েছে। এটি স্পষ্ট যে বস্তুর উপস্থিতির ফলে অবদ্ধ চার্জ ঘনত্ব $\nabla . \mathbf{P}$, পোলারায়ন প্রবাহ ঘনত্ব $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ এবং চুম্বকায়ন প্রবাহ ঘনত্ব $\nabla \times \mathbf{m}$, সমীকরণসমূহে সংযুক্ত হয়েছে।

সাধারণত রৈখিক ও দিক নিরপেক্ষ মাধ্যমে

$$\mathbf{D} = K_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad (৫.৬৫)$$

এবং $$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{K_m \mu_0} \qquad (৫.৬৬)$$

এখানে K_e – ডাই-ইলেকট্রিক সহগ

এবং K_m – আপেক্ষিক প্রবেশ্যতা।

সুতরাং $\mathbf{E}$ ও $\mathbf{H}$ সহযোগে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ দাঁড়ায় :

$$\nabla . \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla . K_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho$$

$$\therefore \quad \nabla . \mathbf{E} = \frac{\rho}{K_e \varepsilon_0} \qquad (৫.৬৭)$$

$$\nabla . \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla . K_m \mu_0 \mathbf{H} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla . \mathbf{H} = 0 \qquad (৫.৬৮)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(K_m \mu_0 \mathbf{H}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + K_m \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \qquad (৫.৬৯)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t}(K_e \varepsilon_0 \mathbf{E}) = \mathbf{J}$$

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{H} - K_e \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \qquad (৫.৭০)$$

যদি ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহকে সময়ের সাইন ফাংশন হিসেবে প্রকাশ করা হয় তাহলে $\frac{\partial}{\partial t}$ করকটিকে; $j\omega$ দ্বারা স্থলাভিষিক্ত করা যায়। সেক্ষেত্রে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি নিম্নরূপ ধারণ করে :

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho \tag{৫.৭১}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{৫.৭২}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mathbf{B} = 0 \tag{৫.৭৩}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \quad j\omega\mathbf{D} = \mathbf{J} \tag{৫.৭৪}$$

৫.১০ ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহের সংকল রূপ (Maxwell's Equations in Integral Form)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে অন্তরকলন অবয়বে (differential form) ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহের উপর বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। ভৌত অর্থ আরো ভালোভাবে বুঝার জন্য এখন সংকল রূপে (integral form) সমীকরণসমূহের উপর আলোচনা করা হবে।

τ – আয়তন ব্যাপী (৫.৬) সমীকরণের সংকল করলে :

$$\int_\tau (\nabla.\mathbf{D})\, d\tau = \int_\tau \rho\, d\tau \tag{৫.৭৫}$$

অপসারিতা মতবাদ প্রয়োগ করে

$$\int_\tau (\nabla.\mathbf{D})\, d\tau = \oint_s \mathbf{D}.da = \int_\tau \rho\, d\tau = Q \tag{৫.৭৬}$$

যেখানে s – আয়তন আবদ্ধকারী তল এবং

Q – আয়তন τ এর অভ্যন্তরে মোট চার্জ।

সমীকরণ (৫.৭৬) থেকে দেখা যায় যে, কোনো আবদ্ধ তল s ভেদকারী বৈদ্যুতিক সরণ ভেক্টর **D** এর বহির্মুখী ফ্লাক্স ঐ তলের অভ্যন্তরে মোট চার্জের সমান। এটিই গসের সূত্র।

একইভাবে সমীকরণ (৫.১২) কে সংকলন করলে দেখা যাবে যে, কোনো আবদ্ধ তল s ভেদকারী চুম্বকীয় আবেশ **B** এর বহির্মুখী ফ্লাক্স শূন্য হবে।

অর্থাৎ

$$\oint_s \mathbf{B}.da = 0 \tag{৫.৭৭}$$

সমীকরণ (৫.২৫) এর তল সংকলন নিলে

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}).\, d\mathbf{a} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\, d\mathbf{a} \tag{৫.৭৮}$$

ধরা যাক, s তল c বক্রপথ দ্বারা আবদ্ধ।

অতএব উপরের সমীকরণে বামপার্শ্বে স্টোকের মতবাদ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\left(\int_s (\nabla \times \mathbf{E}).\, da = \oint_c \mathbf{E}.dl\right) = \left(-\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}.da = -\frac{d\phi_m}{dt}\right)$$

বা

$$\oint_c \mathbf{E}.dl = -\frac{d\phi_m}{dt} \tag{৫.৭৯}$$

অর্থাৎ বক্রপথ C ঘিরে আবিষ্ট তড়িৎ চালক বল ($\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{l}$), ঋণাত্মক চিহ্নসহ s তলে চৌম্বক ফ্লাক্স ϕ_m পরিবর্তনের হারের সমান। পরিশেষে বক্রপথ C দ্বারা আবদ্ধ s তল ব্যাপী (৫.৩৬) সমীকরণের সংকলন করলে পাওয়া যায়,

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}).d\mathbf{a} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).d\mathbf{a}$$

অতএব
$$\oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).d\mathbf{a}$$
$$= \int_s \mathbf{J}.d\mathbf{a} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.d\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{I} + \mathbf{I}_D = \mathbf{I}_T \qquad (৫.৮০)$$

অর্থাৎ বক্রপথ C ঘিরে চৌম্বক চালক বল ($\oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{l}$), s তলে মোট প্রবাহের সমান হবে।

এখানে
$$\int_s \mathbf{J}.d\mathbf{a} = \mathbf{I} = \text{পরিবহণ প্রবাহ},$$
$$\int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.d\mathbf{a} = \mathbf{I}_D = \text{সরণ প্রবাহ এবং}$$
$$\mathbf{I}_T = \text{মোট প্রবাহ।}$$

৫.১১ E–H প্রতিসাম্য (E–H Symmetry)

একটি রৈখিক ও দিক নিরপেক্ষ মাধ্যমে ρ এবং σ এর মান শূন্য হলে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ দাঁড়ায় :

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad (৫.৮১)$$
$$\nabla.\mathbf{H} = 0 \qquad (৫.৮২)$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + K_m \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \qquad (৫.৮৩)$$
$$\nabla \times \mathbf{H} - K_e \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad (৫.৮৪)$$

আমরা এখন এমন একটি ক্ষেত্র বিবেচনা করব যেখানে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা হলো **E** এবং চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতা হলো **H** । এই (**E–H**) ক্ষেত্রের জন্য উপরিউক্ত সমীকরণসমূহ অবশ্যই পরিতৃপ্ত হবে।

আবার আমরা ভিন্ন আর একটি ক্ষেত্র ($\mathbf{E}', \mathbf{H}'$) বিবেচনা করব যেখানে

$$\mathbf{E}' = -\alpha K_m \mu_0 \mathbf{H} = -\alpha \mathbf{B} \qquad (৫.৮৫)$$

এবং
$$\mathbf{H}' = \alpha K_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} \qquad (৫.৮৬)$$

এখানে α আনুপাতিক ধ্রুবক (মিটার/সেকেন্ড)।

(৫.৮১), (৫.৮২), (৫.৮৩) ও (৫.৮৪) সমীকরণগুলিতে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে $\mathbf{E}'$ ও $\mathbf{H}'$ বসিয়ে

$$\nabla . \mathbf{E}' = -\nabla . \alpha K_m \mu_0 \mathbf{H} = -\alpha K_m \mu_0 (\nabla . \mathbf{H})$$

$$= -\alpha K_m \mu_0 \times 0 = 0 \quad (\text{৫.৮২ অনুসারে}) \qquad (\text{৫.৮৭})$$

$$\nabla . \mathbf{H}' = \nabla . \alpha K_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \alpha K_e \varepsilon_0 (\nabla . \mathbf{E})$$

$$= \alpha K_e \varepsilon_0 \times 0 = 0 \quad (\text{৫.৮১ অনুসারে})$$

$$= 0 \qquad (\text{৫.৮৮})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' + K_m \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = \nabla \times (-\alpha K_m \mu_0 \mathbf{H}) + K_m \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha K_e \varepsilon_0 \mathbf{E})$$

$$= -\alpha K_m \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}) + \alpha K_m K_e \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$= -\alpha K_m \mu_0 \left\{ (\nabla \times \mathbf{H}) - K_e \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\}$$

$$= -\alpha K_m \mu_0 \times 0 \quad [\ (\text{৫.৮৪}) \text{ অনুসারে}\ ]$$

$$= 0 \qquad (\text{৫.৮৯})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' - K_e \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} = \nabla \times \alpha K_e \varepsilon_0 \mathbf{E} - K_e \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\alpha K_m \mu_0 \mathbf{H})$$

$$= \alpha K_e \varepsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) + \alpha K_e K_m \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$= \alpha K_e \varepsilon_0 \left\{ (\nabla \times \mathbf{E}) + K_m \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\}$$

$$= \alpha K_e \varepsilon_0 \times 0 \quad [\ (\text{৫.৮৩}) \text{ অনুসারে}\ ]$$

$$= 0 \qquad (\text{৫.৯০})$$

এরূপে দেখা যায় যে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ ক্ষেত্রের জন্যও প্রযোজ্য।

৫.১২ লরেনৎস-এর লেমা (Lorentz's Lemma)

ধরা যাক, কোনো রৈখিক ও দিক নিরপেক্ষ (অর্থাৎ $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) মাধ্যমের একটি অংশে দুটি ভিন্ন ক্ষেত্র বিদ্যমান আছে। তাদের একটির ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ হলো $\mathbf{E}_a, \mathbf{D}_a, \mathbf{B}_a$ ও $\mathbf{H}_a$ এবং অন্যটির ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ হলো $\mathbf{E}_b, \mathbf{D}_b, \mathbf{B}_b$ ও $\mathbf{H}_b$ । উপরিপাতন নীতি অনুসারে ক্ষেত্রদ্বয় সম্পূর্ণ আলাদাভাবে অথবা একটি অন্যটির উপর আরোপিত অবস্থায় (অর্থাৎ নীট ক্ষেত্র ভেক্টর $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b$, $\mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b$ .... ইত্যাদি) বিদ্যমান থাকতে পারে। মাধ্যমের কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সম্ভাব্য দুটি পয়েন্টিং ভেক্টরের (যথা $\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b$ এবং $\mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a$) অপসারিতা নিয়ে আমরা পাই,

$$\nabla . (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) = \mathbf{H}_b . (\nabla \times \mathbf{E}_a) - \mathbf{E}_a . (\nabla \times \mathbf{H}_b)$$

সমীকরণ (৫.৪৭) ও (৫.৪৮) প্রয়োগ করে

$$\nabla . (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) = -\mathbf{H}_b . \frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} - \mathbf{E}_a \left(\mathbf{J}_b + \frac{\partial \mathbf{D}_b}{\partial t} \right) \qquad (\text{৫.৯১})$$

এবং $$\nabla.(\mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a) = -\mathbf{H}_a.\frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial t} - \mathbf{E}_b\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_a}{\partial t}\right) \qquad (৫.৯২)$$

বিবেচ্য বিন্দুতে যদি কোনো উৎস (বের হতে প্রয়োগকৃত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র) না থাকে, তবে

$$\mathbf{J}_a = \sigma\mathbf{E}_a$$

এবং $$\mathbf{J}_b = \sigma\mathbf{E}_b$$

আবার ক্ষেত্র দুটির কম্পন সমান এবং তারা সময়ের সাপেক্ষে হারমোনিক হলে $\frac{\partial}{\partial t}$ করকগুলো ; $i\omega$ দ্বারা স্থলাভিষিক্ত করা যায়। অতএব সমীকরণ (৫.৯১) ও (৫.৯২)

এখন (৫.১০১) সমীকরণে (৫.১০২) সমীকরণ ব্যবহার করে

$$\nabla.\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_\tau \nabla'\left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right)d\tau - \int_\tau \frac{1}{r}(\nabla.\mathbf{J})\,d\tau\right] \qquad (৫.১০৩)$$

ডানপার্শ্বের প্রথম সংকলটি সমীকরণ (৫.৯৭) এর অনুরূপ ; ব্যতিক্রম, এক্ষেত্রে বিন্দুর পরিবর্তে P' বিন্দুতে J/r এর অপসারিতা নেয়া হয়েছে। সংকলটিতে অপসারিতা মতবাদ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\nabla.\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\mathbf{J}}{r}.\,d\mathbf{a} - \int_\tau \frac{1}{r}(\nabla'.\mathbf{J})\,d\tau\right] \qquad (৫.১০৪)$$

যেখানে, S আয়তন আবদ্ধকারী তল।

তলের যে কোনো স্থানে প্রবাহ ঘনত্ব J এর মান হয় শূন্য না হয় এর দিক তলের সাথে স্পর্শক ; কিন্তু da এর দিক তলের সাথে লম্ব।

অতএব $\mathbf{J}.d\mathbf{a} = 0$

এবং $$\nabla.\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r}\nabla'.\mathbf{J}\,d\tau \qquad (৫.১০৫)$$

এখন চার্জের নিত্যতা সূত্র হতে আমরা জানি,

$$\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (৫.১০৬)$$

সুতরাং (১০) ও (১১) হতে

$$\nabla.\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau$$

$$= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \frac{\rho}{4\pi r}\,d\tau \qquad (৫.১০৭)$$

τ যে কোনো আয়তন যা প্রয়োজনবোধে অসীম ধরা যেতে পারে। তাহলে সহজেই প্রমাণ করা যায়,

$$\int_{\tau=\infty} \frac{\rho}{4\pi r}\,d\tau = K_e\,\varepsilon_0\,V \qquad (৫.১০৮)$$

K_e – আপেক্ষিক অনুমোদিতা

ε_0 – মুক্তস্থানের অনুমোদিতা

এবং V – অদিকবর্তী বিভব।

এরূপে সমীকরণ (১২) ও (১৩) থেকে

$$\nabla.\mathbf{A} = -K_e\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (৫.১০৯)$$

এটিই লরেন্‌ৎসের শর্ত যা অচুম্বকীয় বস্তুর ক্ষেত্রে V এবং A এর মধ্যকার সম্পর্ককে বুঝায় যদি V সময়ের উপর নির্ভরশীল না হয় তবে

$$\nabla.\mathbf{A} = 0 \qquad (৫.১১০)$$

সমাধানকৃত সমস্যাবলী
(Solved Problems)

সমস্যাবলী (Problems)

১। মুক্তস্থানে $\mathbf{E} = \mathbf{i}\, E_0 \sin(\omega t - \beta z)$. $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ ও $\mathbf{H}$ ভেক্টরসমূহের মান বের কর যখন $t = 0$ তখন $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের অবস্থান অংকন কর।

Given $\mathbf{E} = \mathbf{i}\, E_0 \sin(\omega t - \beta z)$ in free space, find $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ & $\mathbf{H}$. Sketch $\mathbf{E}$ & $\mathbf{H}$ at $t = 0$)

সমাধান

এখানে $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \beta z)\, \mathbf{i}$ (১)

এখন ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ থেকে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \sin(\omega t - \beta z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা $$\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}[E_0 \sin(\omega t - \beta z)] - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}[E_0 \sin(\omega t - \beta z)] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা $$-\mathbf{j}\, \beta E_0 \cos(\omega t - \beta z) - 0 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা $$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{j}\, \beta E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

সংকলন করে

$$\mathbf{B} = \mathbf{j}\, \frac{\beta E_0}{\omega} \sin(\omega t - \beta z)$$

এখানে সংকলন ধ্রুবক একটি স্থির ক্ষেত্র বলে সেটিকে অগ্রাহ্য করা হয়েছে।

তাহলে $$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j}\, \frac{\beta E_0}{\omega \mu_0} \sin(\omega t - \beta z)$$

এখানে উল্লেখ্য যে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ পরস্পরের সাথে লম্ব, কারণ $\mathbf{E}$, x অক্ষ বরাবর $\mathbf{i}$ এর দিকে এবং $\mathbf{H}$, y অক্ষ বরাবর $\mathbf{j}$ এর দিকে প্রবাহিত হচ্ছে।

যখন $t = 0$, $\sin(\omega t - \beta z) = -\sin \beta z$

২। দেখাও যে ২নং সমস্যাতে বর্ণিত E এবং H ক্ষেত্রদ্বয় এমন একটি তরঙ্গ উৎপন্ন করে যা z অক্ষ বরাবর প্রবাহিত হয়। আরো প্রমাণ কর যে, তরঙ্গ দ্রুতি এবং $\mathbf{E}/\mathbf{H}$ এর মান কেবল মুক্ত স্থানের (মাধ্যম) গুণাগুণের উপর নির্ভরশীল

(Show that the **E** & **H** fields of problem 2 constitute a wave travelling in the z direction. Verify that the wave speed and E/H depend only on the properties of free space)

সমাধান

E এবং **H** একত্রে sin (ωt–βz) হিসেবে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং **E** এবং **H** –এর প্রদত্ত অবস্থান নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\omega t - \beta z = \text{ধ্রুবক} = \omega t_0$$

বা
$$z = \frac{\omega}{\beta}(t - t_0)$$

কিন্তু এটি একটি সমতলের সমীকরণ এবং সমতলটি এর অভিলম্ব K এর দিকে $C = \frac{\omega}{\beta}$ (১) দ্রুতিতে প্রবাহমান (এখানে β এবং ω কে ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়েছে ; β ঋণাত্মক হলে গতির দিক (–**K**) হবে। এরূপে ১নং চিত্রে (সমস্যা ২) সম্পূর্ণ ছাঁচ C দ্রুতিতে z অক্ষ বরাবর প্রবাহমান।

এখন ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ হতে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\beta E_0}{\omega \mu_0}\sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \beta z)\,\mathbf{i}]$$

বা
$$-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\beta E_0}{\omega \mu_0}\sin(\omega t - \beta z)\right] + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\beta E_0}{\omega \mu_0}\sin(\omega t - \beta z)\right]$$
$$= \varepsilon_0 E_0\, \omega \cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{i}$$

বা
$$\mathbf{i}\frac{\beta^2 E_0}{\omega \mu_0}\cos(\omega t - \beta z) + 0 = \omega\, \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{i}$$

বা
$$\frac{\beta^2}{\omega \mu_0} = \varepsilon_0 \omega$$

বা
$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega^2}{\beta^2} = C^2$$

∴
$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times (10^{-9}/36\pi)}}$$
$$= 3 \times 10^8 \text{ মিটার/সেকেন্ড।}$$

আবার
$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \frac{E_0 \sin(\omega t - \beta z)}{\frac{\beta E_0}{\omega \mu_0}\sin(\omega t - \beta z)}$$

$$= \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \mu_0 C = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{10^{-9}/36\pi}\right)^{1/2}$$

$$= 120\pi = 377 \text{ ওহম}$$

এরূপে প্রমাণিত হলো যে তরঙ্গ ক্রতি এবং E/H এর মান কেবল মুক্তস্থানের গুণাগুণ (ε_0, μ_0) এর উপর নির্ভরশীল।

৩। মুক্তস্থানে $\mathbf{H} = \mathbf{i}H_0 e^{j(\omega t+\beta z)}$ দেয়া আছে। $\mathbf{E}$ এর মান বের কর।
(Given $\mathbf{H} = \mathbf{i}H_0 e^{j(\omega t+\beta z)}$ in free space, find $\mathbf{E}$.)

সমাধান

আমরা জানি যে, মুক্তস্থানে $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$;

সুতরাং
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_0 e^{j(\omega t+\beta z)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

বা $$\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}\left[H_0 e^{j(\omega t+\beta z)}\right] - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\left[H_0 e^{j(\omega t+\beta z)}\right] = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

বা $$\mathbf{j}\, j\beta H_0 e^{j(\omega t+\beta z)} - 0 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

সময়ের সাপেক্ষে সংকলন করে

$$\mathbf{D} = \mathbf{j}\, j\beta \frac{1}{j\omega} H_0 e^{j(\omega t+\beta z)}$$

$$= \mathbf{j}\frac{\beta H_0}{\omega} e^{j(\omega t+\beta z)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \mathbf{j}\frac{\beta H_0}{\omega\varepsilon_0} e^{j(\omega t+\beta z)} \quad \text{(উত্তর)}।$$

৪। মুক্তস্থানে $\mathbf{E} = 30\pi e^{j(10^8 t-\beta z)}\,\mathbf{i}$ (বিভব/মিটার) এবং $\mathbf{H} = H_0 e^{j(10^8 t+\beta z)}$ $\mathbf{j}$ (অ্যাম্পিয়ার/মিটার) দেয়া আছে। H_0 ও β এর মান কত? $(\beta>0)$

[Given $\mathbf{E} = 30\pi e^{j(10^8 t+\beta z)}\,\mathbf{i}$ (v/m) & $\mathbf{H} = H_0 e^{j(10^8 t+\beta z)}\,\mathbf{j}$ (A/m) in free space, find H_0 & β $(\beta>0)$]

সমাধান

প্রদত্ত প্রশ্ন হতে দেখা যায় যে এটি একটি সমতলীয় তরঙ্গ; মুক্তস্থানে এ ধরনের যে কোনো তরঙ্গের জন্য

$$C = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3\times10^8 \text{ মি./সে.} \qquad (১)$$

এবং
$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \qquad (২)$$

প্রদত্ত সমস্যা হতে এটি স্পষ্ট যে $\omega = 10^8$ । এখন ১নং সমীকরণে $\omega = 10^8$ প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\frac{10^8}{\beta} = 3\times10^8$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{10^8}{3\times10^8} = \frac{1}{3} \text{ রেডিয়ান/মিটার}$$

আবার প্রদত্ত প্রশ্নানুসারে $E_0 = 30\pi$. এবং সমীকরণ (২) এ E_0 এর মান বসিয়ে

$$\frac{30\pi}{H_0} = \pm 120\pi$$

$$\therefore \quad H_0 = \pm \frac{30\pi}{120\pi} = \pm\frac{1}{4} \text{ (অ্যাম্পিয়ার/মিটার)}$$

এখন H_0 এর চিহ্ন নির্ধারণের জন্য $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ সমীকরণটি প্রয়োগ করা যাক।

অর্থাৎ
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 30\pi\, e^{j(10^8 t+\beta z)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0 H_0\, e^{j(10^8 t+\beta z)}\, \mathbf{j}\right]$$

বা
$$\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}\left[30\pi\, e^{j(10^8 t+\beta z)}\right] - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\left[30\pi\, e^{j(10^8 t+\beta z)}\right]$$
$$= -\mathbf{j}\, j\, 10^8 \mu_0 H_0\, e^{j(10^8 t+\beta z)}$$

বা
$$\mathbf{j}\, j\, \beta\, 30\pi\, e^{j(10^8 t+\beta z)} = -\mathbf{j}\, j\, 10^8 \mu_0 H_0\, e^{j(10^8 t+\beta z)}$$

অর্থাৎ H_0 এর মান অবশ্যই ঋণাত্মক হবে

$$\therefore \quad H_0 = -\frac{1}{4} \quad \text{(অ্যাম্পিয়ার/মিটার)।}$$

৫। (ক) প্রমাণ কর যে মুক্তস্থানে নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ অপরিবর্তনীয়,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\cos\theta + C\,\mathbf{B}\sin\theta$$
$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta$$

(খ) আরো দেখাও যে শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ এবং পয়েন্টিং ভেক্টর $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ উল্লিখিত শর্তের অধীনে অপরিবর্তনীয়। [(a) Show that Maxwell's equations for free space are invariant under the transformation.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\cos\theta + C\,\mathbf{B}\sin\theta$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta$$

৮। Show that the energy density $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ and the poyenting vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ are also invariant under this transformation.]

সমাধান

মুক্তস্থানে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ নিম্নরূপ :

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad (১)$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad (২)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (৩)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৪)$$

প্রদত্ত নতুন শর্তাধীনে

$$\nabla.\mathbf{E}' = \nabla.(\mathbf{E}\cos\theta + C\,\mathbf{B}\sin\theta)$$

$$= (\nabla.\mathbf{E})\cos\theta + (\nabla.\mathbf{B})\,C\sin\theta$$

$$= 0 + 0 \qquad [\,(১) \text{ ও } (২) \text{ অনুসারে}\,]$$

$$\therefore \quad \nabla.\mathbf{E}' = 0 \qquad (৫)$$

$$\nabla.\mathbf{B}' = \nabla.[-(\mathbf{E}/C)\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta]$$

$$= -\frac{1}{C}\sin\theta\,(\nabla.\mathbf{E}) + (\nabla.\mathbf{B})\cos\theta$$

$$= 0 + 0$$

$$\therefore \quad \nabla.\mathbf{B}' = 0 \qquad (৬)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = \nabla \times (\mathbf{E}\cos\theta + C\mathbf{B}\sin\theta)$$

$$= (\nabla \times \mathbf{E})\cos\theta + C\sin\theta\,(\nabla \times \mathbf{B})$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cos\theta + C\sin\theta\left(\mu_0\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cos\theta + \left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)C\sin\theta$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cos\theta + \frac{C}{C^2}\sin\theta\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \left[\because \quad C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\right]$$

$$\text{বা} \quad \nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{B}\cos\theta - \frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta\right]$$

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \qquad (৭)$$

সবশেষে
$$\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}')$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \left[-\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta\right]$$

বা
$$\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\sin\theta}{C}(\nabla \times \mathbf{E}) + \cos\theta\,(\nabla \times \mathbf{B})\right]$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left[+\frac{\sin\theta}{C}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \cos\theta\,\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\sin\theta}{C}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\cos\theta}{C^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$$
$$= \frac{1}{C^2\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}[\,C\sin\theta\mathbf{B} + \cos\theta\mathbf{E}\,]$$
$$= \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}[\,\mathbf{E}\cos\theta + C\mathbf{B}\sin\theta\,]$$
$$= \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} \qquad (৮)$$

এরূপে (৫), (৬), (৭) ও (৮) থেকে আমরা বলতে পারি যে প্রদত্ত নতুন শর্তাধীনে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ অপরিবর্তিত থাকে।

(খ) $E'^2 = \mathbf{E}'.\mathbf{E}'$

বা $E'^2 = (\mathbf{E}\cos\theta + C\mathbf{B}\sin\theta).(\mathbf{E}\cos\theta + C\mathbf{B}\sin\theta)$

$$= E^2\cos^2\theta + C\mathbf{E}.\mathbf{B}\cos\theta\sin\theta + C\mathbf{B}.\mathbf{E}\sin\theta\cos\theta + C^2B^2\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_0\cos^2\theta) + \frac{2\mathbf{E}.\mathbf{B}\ \varepsilon_0 C}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\varepsilon_0 C^2B^2\sin^2\theta \qquad (৯)$$

আবার $\mathbf{B}'.\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^2 = \left[-\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta\right].\left[-\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta\right]$

বা
$$\mathbf{B}'^2 = \frac{\mathbf{E}^2}{C^2}\sin^2\theta - \frac{\mathbf{E}.\mathbf{B}}{C}\sin\theta\cos\theta - \frac{\mathbf{B}.\mathbf{E}}{C}\sin\theta\cos\theta + B^2\cos^2\theta$$
$$= \frac{E^2}{C^2}\sin^2\theta - \frac{2\mathbf{E}.\mathbf{B}}{C}\sin\theta\cos\theta + B^2\cos^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\mu_0}B'^2 = \frac{E^2}{2\mu_0C^2}\sin^2\theta - \frac{2\mathbf{E}.\mathbf{B}}{2\mu_0 C}\sin\theta\cos\theta + \frac{B^2}{2\mu_0}\cos^2\theta \qquad (১০)$$

(৯) ও (১০) যোগ করে

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E'^2 + \frac{1}{2\mu_0}B'^2\right) = \Big[\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cos^2\theta + \varepsilon_0 C\,\mathbf{E}.\mathbf{B}\sin\theta\cos\theta$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0C^2B^2\sin^2\theta + \frac{E^2}{2\mu_0C^2}\sin^2\theta - \frac{1}{\mu_0 C}\mathbf{E}.\mathbf{B}\sin\theta\cos\theta$$
$$+ \frac{1}{2\mu_0}B^2\cos^2\theta\Big] \qquad (১১)$$

এখন $$\frac{1}{\mu_0 C^2} = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu_0} = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 C^2 = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{\mu_0} \qquad (১২)$$

এবং $$\varepsilon_0 C = \frac{\varepsilon_0 C^2}{C} = \frac{1}{\mu_0 C}$$

(১২) নং সমীকরণ (১১)–তে প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 + \frac{1}{2\mu_0}B'^2 = \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + \frac{1}{2\mu_0}B^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 + \frac{1}{2\mu_0}B'^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (১৩)$$

অর্থাৎ শক্তি ঘনত্ব প্রদত্ত শর্তাধীনে অপরিবর্তনীয়।

এখন $$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = (\mathbf{E}\cos\theta + C\mathbf{B}\sin\theta) \times \left(-\frac{\mathbf{E}}{C}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta\right)$$

বা $$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = -\frac{1}{C}(\mathbf{E}\times\mathbf{E})\cos\theta\sin\theta + (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cos^2\theta$$

$$-(\mathbf{B}\times\mathbf{E})\sin^2\theta + C(\mathbf{B}\times\mathbf{B})\sin\theta\cos\theta$$

$$= (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cos^2\theta + (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\sin^2\theta$$ [অন্য পদদ্বয় শূন্য]

$$= \mathbf{E}\times\mathbf{B}\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

বা $$\mu_0(\mathbf{E}'\times\mathbf{H}') = \mu_0(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

$$\therefore \quad \mathbf{E}'\times\mathbf{H}' = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (১৪)$$

অর্থাৎ পয়েন্টিং ভেক্টরও প্রদত্ত শর্তাধীনে অপরিবর্তনীয়।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ

(Propagation of Plane Electromagnetic Waves)

৬.০ ভূমিকা

পঞ্চম অধ্যায়ে ম্যাক্সওয়েলের যে সমীকরণগুলি পাওয়া গেছে তা প্রধানত স্থির তড়িৎ, স্থির চুম্বক, তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশের উৎস ও ক্ষেত্র ভেক্টরের বর্ণনা প্রদান করে। বস্তুতপক্ষে ম্যাক্সওয়েল উক্ত সমীকরণগুলির মাধ্যমে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের গতি ও সঞ্চারণের মতো গুরুত্বপূর্ণ ঘটনাবলীর প্রচলন করেন। এ অধ্যায়ে আমরা বিভিন্ন মাধ্যমে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ সম্পর্কে আলোচনা করব।

৬.১ শূন্য মাধ্যমে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ (Electromagnetic Waves in Vacuum)

আমাদের বর্তমান আলোচনা কেবল শূন্য মাধ্যমে সংঘটিত ঘটনাবলীর মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখব কারণ শূন্য মাধ্যমের সুবিধা হচ্ছে যে, মতবাদসমূহ সহজবোধ্য অথচ এর মৌলিক দিকসমূহ অপরিবর্তিত থাকে।

শূন্য মাধ্যমে :

$$\rho = 0, \quad \sigma = 0 \tag{৬.১}$$

এরূপে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ দাঁড়ায়

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{৬.২}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{৬.৩}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{৬.৪}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \tag{৬.৫}$$

যেখানে

এবং

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}\right\} \tag{৬.৬}$$

এখন $\mathbf{E}$ ভেক্টরের তরঙ্গ সমীকরণ পেতে হলে আমাদেরকে (৬.২) থেকে (৬.৪) সমীকরণের কার্ল (Curl) নিতে হবে। এরূপে পাওয়া যায়

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0$$

বা

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{৬.৭}$$

উপরিউক্ত সমীকরণের প্রথম পদ ১.১২ অনুচ্ছেদের ১৩নং ভেক্টর অভেদ অনুসারে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla . \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \qquad (৬.৮)$$

এখন (৬.২) ও (৬.৬) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\nabla . \mathbf{E} = 0$$

অতএব (৬.৮) সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \qquad (৬.৯)$$

আবার (৬.৭) এর দ্বিতীয় পদকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

$$= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \qquad [\therefore \ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}]$$

$$= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \qquad [\text{(৬.৫) প্রয়োগ করে}]$$

$$= = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (\because \ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}) \qquad (৬.১০)$$

(৬.৯) ও (৬.১০) কে (৬.৭) এ ব্যবহার করে পাওয়া যায়

বা $$-\nabla^2 \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

বা $$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (৬.১১)$$

আবার সমীকরণ (৬.৫) এর উভয় পাশে কার্ল নিয়ে

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

বা $$-\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla (\nabla . \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{D})$$

বা $$-\nabla^2 \mathbf{H} + 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) \quad [\therefore \ \nabla . \mathbf{H} = 0 \text{ এবং } \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}]$$

বা $$-\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

বা $$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$\because$ $$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (৬.১২)$$

এখন সমীকরণ (৬.১১) এর উভয় পাশে ε_0 দ্বারা গুণ করে আমরা পাই

$$\nabla^2 (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_0 \mathbf{E})$$

বা $$\nabla^2 \mathbf{D} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \qquad (৬.১৩)$$

অনুরূপভাবে μ_o দ্বারা (৬.১২) কে উভয় পাশে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad (৬.১৪)$$

(৬.১১), (৬.১২) (৬.১৩) এবং (৬.১৪) সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে ক্ষেত্র ভেক্টর **E**, **H**, **D** ও **B** এর তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়। উল্লেখ্য যে, এ সমীকরণগুলির রূপ অভিন্ন।

(৬.১১) সমীকরণ থেকে ক্ষেত্র ভেক্টর এর উপাংশ সমীকরণগুলি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (৬.১৫)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_y = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (৬.১৬)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad (৬.১৭)$$

ক্ষেত্র ভেক্টর H, D এবং B এর জন্য ঠিক একইভাবে উপাংশ সমীকরণগুলি লেখা যায়। যদি কোনো ভৌত রাশির স্থানের সাপেক্ষে দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ, কোনো ধ্রুব সংখ্যা গুণিতক ঐ রাশির সময়ের সাপেক্ষে দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ এর সমান হয় তবে ঐ ব্যবকলনী সমীকরণকে উক্ত ভৌত রাশির অহ্রাসকৃত তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয় এবং ধ্রুব সংখ্যাটি হচ্ছে তরঙ্গের দশা বেগের বর্গের ব্যস্ত।

ধরা যাক, P একটি ভৌত রাশি।

তাহলে
$$\nabla^2 P = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (৬.১৮)$$

হবে P এর অহ্রাসকৃত তরঙ্গ সমীকরণ যেখানে u হচ্ছে তরঙ্গের দশা বেগ।

উল্লেখ্য যে (৬.১১), (৬.১২), (৬.১৩) ও (৬.১৪) সমীকরণগুলি (৬.১৮) সমীকরণ থেকে ভিন্ন নয়, কারণ $\mu_0 \varepsilon_0$ হচ্ছে $\frac{1}{u^2}$ এর রূপান্তর। উপরিউক্ত আলোচনা থেকে স্পষ্টত প্রতীয়মান হয় যে, ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ মুক্ত মাধ্যমে তরঙ্গ আকারে প্রবাহিত হতে পারে এবং এ প্রবাহের বেগ C ;

$$\frac{1}{C^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad (৬.১৯)$$

এ সমীকরণটি তড়িৎ চুম্বকীয় তিনটি মৌলিক ধ্রুবককে সম্পর্কযুক্ত করেছে। ধ্রুবকগুলি হলো (১) তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের বেগ C (২) মুক্ত মাধ্যমের অনুমোদিতা (permitivity) ε_0 এবং (৩) মুক্ত মাধ্যমের প্রবেশ্যতা (permeability) μ_0 ।

এখন আমরা জানি,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ হেনরি/মিটার}$$

$$C = 2.9979 \times 10^{8} \text{ মিটার/সেকেন্ড}$$

$$\because \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{C^2\mu_0} = \frac{1}{(2.9979 \times 10^{8})^2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \text{ ফ্যারাড/মিটার}$$

$$= 8.8542 \times 10^{-12} \text{ ফ্যারাড/মিটার} \qquad (৬.২০)$$

৬.২ মুক্ত স্থানে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ (Plane Electromagnetic Waves in Free Space)

মনে করি একটি সমতল তরঙ্গ z অক্ষ বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে। তাহলে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতা $\mathbf{E}$ শুধু z এর দিকে পরিবর্তনশীল।

অর্থাৎ $\mathbf{E}$ কেবল z এবং t এর ফাংশন

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t) \qquad (৬.২১)$$

সুতরাং $$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0$$

বা $$\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0$$

বা $$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = 0 \qquad (৬.২২)$$

এবং $$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0 \quad \text{বা} \quad \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = 0 \qquad (৬.২৩)$$

তাহলে $$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}$$

$$= 0 + 0 + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} \quad [\text{(৬.২২) ও (৬.২৩) প্রয়োগ করে}]$$

$$= \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} \qquad (৬.২৪)$$

কিন্তু আমরা জানি, মুক্ত স্থানে $\nabla.\mathbf{E} = 0$

$$\therefore \quad \nabla.\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0 \qquad (৬.২৫)$$

এরূপে দেখা যাচ্ছে যে E_z, z–এর কোনো ফাংশন নয়

অতএব আমরা ধরব

$$E_z = 0 \qquad (৬.২৬)$$

সুতরাং সমীকরণ (৬.২১) অনুসারে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গে **E** ভেক্টরের কেবল x ও y উপাংশ বিদ্যমান অর্থাৎ **E** এর কোনো লম্বিক উপাংশ নেই শুধু আড়াআড়ি উপাংশ আছে।

সরলীকরণের জন্য ধরা যাক, **E** ভেক্টর x অক্ষের সাথে সমান্তরাল

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\, E_x (z, t) \qquad (৬.২৭)$$

এ সমীকরণ থেকে **E** এর মান ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ $\left(\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ এ প্রয়োগ করে :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \mathbf{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

বা
$$\mathbf{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{k}\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathbf{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \mathbf{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

বা
$$\mathbf{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} - 0 = -\mathbf{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \mathbf{k}\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad [\text{(৬.২৩) অনুসারে}]$$

উভয় পার্শ্ব থেকে **i, j, k** এর সহগগুলির পারস্পরিক সমতার ভিত্তিতে আমরা পাই,

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \text{বা} \quad B_x = 0$$

$$H_x = 0 \qquad (\because B_x = \mu_0 H_x) \qquad (৬.২৮)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \text{বা} \quad B_z = 0, \quad H_z = 0$$

এবং
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (৬.২৯)$$

(৬.২৬) ও (৬.২৮) থেকে দেখা যায় যে, **E** এবং **H** উভয় ভেক্টরেরই z উপাংশ অনুপস্থিত ; উল্লেখ্য যে z দিক হচ্ছে তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, মুক্ত স্থানে সঞ্চারিত সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের প্রকৃতি আড়াআড়ি। আরো সরলীকরণের জন্য ধরা যাক তরঙ্গটি শুধু +z অক্ষের দিকে চলমান। এখানে তরঙ্গের বেগ C এবং একে একটি সাইন তরঙ্গ বিবেচনা করে আমরা লিখতে পারি :

$$E_x = E_{x0} \cos\left[\omega\left(t - \left(\frac{z}{C}\right) + \theta\right]\right. \qquad (৬.৩০)$$

এখানে θ হলো দশা কোণ, যখন t = 0 এবং z = 0 উপরিউক্ত সমীকরণটিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$E_x = E_{x0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \theta\right] \qquad (৬.৩১)$$

যেখানে অবশ্যই শুধু বাস্তব পদ বিবেচ্য।

ডি ময়ভারের মতবাদ অনুসারে

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

এখানে বাস্তব পদ $= \cos\theta$ এবং

অবাস্তব পদ $= j\sin\theta$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি :

$$D_x = D_{x0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right] \quad (৬.৩২)$$

$$H_y = H_{y0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right] \quad (৬.৩৩)$$

$$B_y = B_{y0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right] \quad (৬.৩৪)$$

এখানে $D_x = \varepsilon_0 E_x, \quad D_{x0} = \varepsilon_0 E_{x0}$

$B_y = \mu_0 H_y, \quad B_{y0} = \mu_0 H_{y0}$

এখন (৬.৩১) ও (৬.৩৪) থেকে যথাক্রমে E_x এবং B_y এর মান, (৬.২৯) এ প্রয়োগ করে :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{ E_{x0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right]\right\} = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{ B_{y0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right]\right\}$$

বা $$-j\frac{\omega}{C} E_{x0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right] = j\omega B_{y0} \exp j\left[\omega\left(t - \frac{z}{C}\right) + \theta\right]$$

বা $$-j\frac{\omega}{C} E_x = -j\omega B_y$$

বা $$\frac{E_x}{B_y} = C = 3.00\times10^8 \text{ মিটার/সেকেন্ড} \quad (৬.৩৫)$$

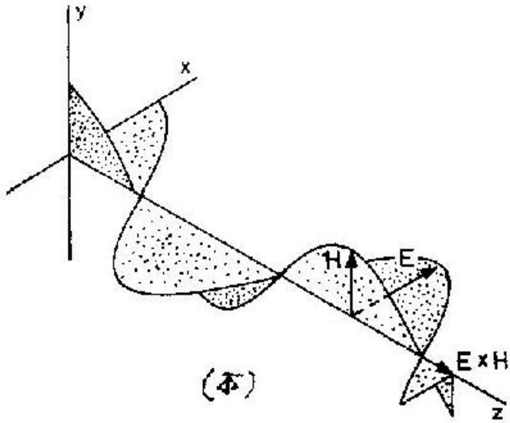
বা $$\frac{E_x}{\mu_0 H_y} = C$$

$$\because \quad Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = \mu_0 C = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

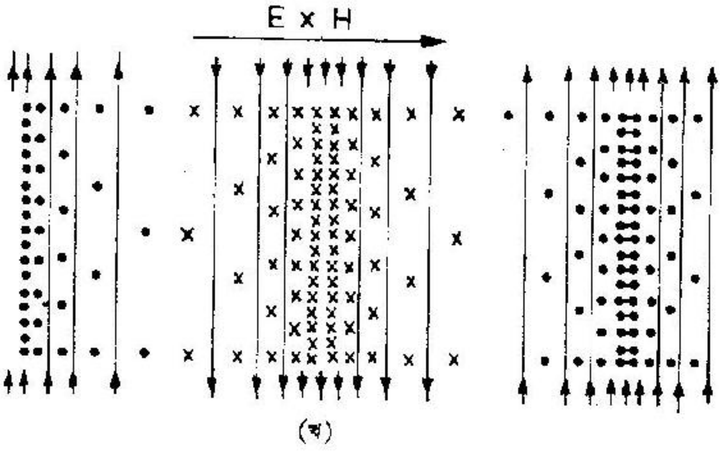
$$= \left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.8542 \times 10^{-12}}\right)^{1/2} = 377 \text{ ওহম} \quad (৬.৩৬)$$

Z_0-কে মুক্ত স্থানের তরঙ্গ রোধ (Wave impedance) বলে। **E** এবং **H** ভেক্টর পরস্পরের সাথে লম্ব এবং সেগুলির দিগাবস্থা এমন যে ভেক্টর গুণফল **E** × **H** এর দিক এবং তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক একই (চিত্র ৬.১)

E এবং **H** ভেক্টর এর দশা অভিন্ন, কারণ সর্বসময়ে সর্বাবস্থায়ই এদের তুলনামূলক মান সমান এবং যেহেতু E_x/H_y একটি বাস্তব রাশি।



(ক)



(খ)

চিত্র ৬.১ : +z অক্ষ বরাবর চলমান একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের E এবং H ভেক্টরের দিগাবস্থা। (ক) একটি নির্দিষ্ট মুহূর্তে z অক্ষের সাপেক্ষে E এবং H এর পরিবর্তন। (খ) xz তলে E এবং H ভেক্টরের বলরেখার বণ্টন, তলের উপরিভাগ হতে দেখলে। রেখাগুলি বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র নির্দেশ করে, বিন্দুগুলি xz তলের উপরের দিকের এবং x চিহ্নসমূহ তলের ভিতরের দিকের চুম্বকীয় বলরেখা নির্দেশ করে। ভেক্টর E x H এর দিক তরঙ্গ সঞ্চরণের দিক নির্দেশ করে।

বৈদ্যুতিক শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ এবং চুম্বকীয় শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ এর দশা অভিন্ন এবং এরা পরস্পর সমান, কারণ

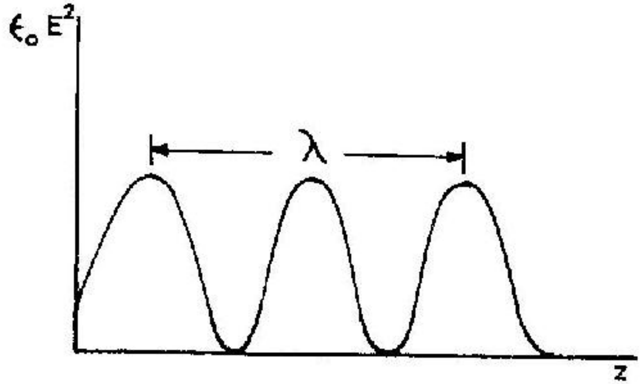
$$\frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}{\frac{1}{2}\mu_0 H^2} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(\frac{E}{H}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}(\mu_0 C)^2 \qquad \text{[(৬.৩৬) অনুসারে]}$$

$$= \varepsilon_0 \mu_0 C^2$$

$$= \frac{1}{C^2}\cdot C^2 = 1 \qquad \text{[(৬.১৯) অনুসারে]} \qquad (৬.৩৭)$$

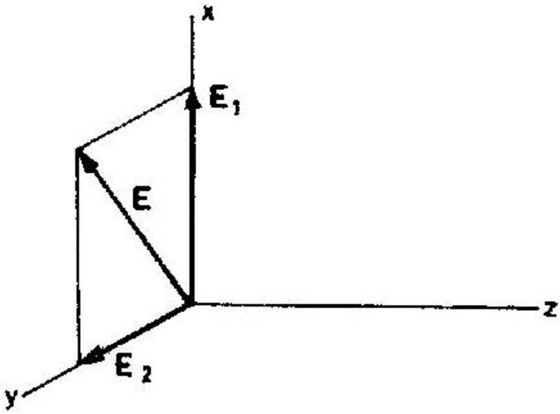
যে কোনো সময়ে মোট শক্তি ঘনত্ব $\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2 \quad \text{বা} \quad \mu_0 H^2\right)$ এর বণ্টন ৬.২ চিত্রে প্রদর্শিত হলো।



চিত্র ৬.২ : z অক্ষ বরাবর চলমান একটি সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের শক্তি ঘনত্ব ($\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$), z এর ফাংশন হিসেবে চিত্রায়িত।

৬.৩ পোলারায়ন (Polarization)

পূর্ববর্তী অংশে আমরা এক ধরনের তরঙ্গ বিবেচনা করেছি যেখানে **E** এবং **H** ভেক্টর এদের স্ব–স্ব দিক অপরিবর্তিত রেখে পরস্পরের সাথে লম্ব ছিল। **E** ভেক্টরকে x অক্ষের সমান্তরাল কল্পনা করে **H** ভেক্টরকে y অক্ষের সমান্তরাল পাওয়া গিয়েছিল। এ ধরনের তরঙ্গকে তলীয় পোলারায়িত তরঙ্গ (plane polarized wave) বলা হয়। শুরুতে পোলারায়ন তল বলতে তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক ও **H** ভেক্টর ধারণকৃত তলকে এবং স্পন্দন তল বলতে তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক ও **E** ভেক্টর ধারণকৃত তলকে বুঝানো হতো। কিন্তু আধুনিক বিজ্ঞানে পোলারায়ন তল এবং স্পন্দন তল শব্দদ্বয়ের কোনোটিই ব্যবহার করা হয় না বরং রেডিও ইঞ্জিনিয়ারদের মতে একটি তরঙ্গকে এর **E** ভেক্টরের দিকে পোলারায়িত বলে ধরা হয়। কোনো তরঙ্গকে দুটি পরস্পর লম্বিক উপাংশে বিভক্ত করলে যদি তারা অভিন্ন দশায় এবং সমতল পোলারায়িত থাকে তবে ঐ তরঙ্গকে সমতল পোলারায়িত তরঙ্গ বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ ৬.৩ চিত্রে **E** ভেক্টরকে $\mathbf{E}_1$ ও $\mathbf{E}_2$ দুটি পরস্পর লম্বিক উপাংশে বিভক্ত দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৬.৩ : E ভেক্টরকে E_1 ও E_2 দুটি উপাংশে বিভক্তি।

ভিন্ন দশার দুটি সমতল পোলারায়িত তলকেও একত্র করা যেতে পারে। তবে সেক্ষেত্রে $\mathbf{E}_1$ এবং $\mathbf{E}_2$ এর সর্বোচ্চ মান একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একই সময়ে পাওয়া যায় না এবং তাদের সমষ্টি ভেক্টর $\mathbf{E}$, z অক্ষ ঘিরে উপবৃত্তাকারে পরিভ্রমণ করে। এ ধরনের তরঙ্গকে উপবৃত্তীয় পোলারায়িত তরঙ্গ (Elliptically polarized wave) বলে।

যদি $\mathbf{E}_1$ ও $\mathbf{E}_2$–র দশা কোণের পার্থক্য 90° এবং তাদের বিস্তার সমান হয় তবে উপবৃত্তটি একটি বৃত্তে পরিণত হয় এবং এ ধরনের তরঙ্গকে বৃত্তীয় পোলারায়িত (circularly polarized) তরঙ্গ বলে।

৬.৪ মুক্তস্থানে পয়েন্টিং ভেক্টর (The Pointing Vector in Free Space)

৬.২ অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে মুক্তস্থানে সমতল তড়িত চুম্বকীয় তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক এবং $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ভেক্টরের দিক অভিন্ন।

আমরা এখন মুক্তস্থানে যে কোনো তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের জন্য $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ভেক্টরের অপসারিতা (divergence) নির্ণয় করতে চাই।

ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণের ($\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$) উভয় পাশের পদগুলির সাথে $\mathbf{E}$ ভেক্টরের ডট (.) গুণন নিয়ে :

$$\mathbf{E}.(\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad [\because \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}] \qquad (৬.৩৮)$$

এখন $$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}.\mathbf{E}) = \mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 2\,\mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \qquad \mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}.\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} \qquad (৬.৩৯)$$

(৬.৩৮) ও (৬.৩৯) থেকে আমরা পাই

$$\mathbf{E}.(\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad (৬.৪০)$$

আবার ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণে $\left(\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ উভয় পাশের পদগুলির সাথে $\mathbf{H}$ ভেক্টরের ডট (.) গুণন নিয়ে

$$\begin{aligned}\mathbf{H}.(\nabla \times \mathbf{E}) &= -\mathbf{H}.\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \mathbf{H}.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad [\because \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}] \\ &= -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} \qquad (৬.৪১)\end{aligned}$$

এখন (৬.৪১) থেকে (৬.৪০) বিয়োগ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned}\mathbf{H}.(\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}.(\nabla \times \mathbf{H}) &= -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right)\end{aligned}$$

উপরের সমীকরণের বামপাশে

$\nabla.(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}.(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A}.(\nabla \times \mathbf{B})$ এই ভেক্টর অভেদ প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\nabla.(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) \qquad (৬.৪২)$$

τ আয়তনের জন্য সংকলন করে :

$$\int_\tau \nabla.(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d\tau = -\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) d\tau \qquad (৬.৪৩)$$

(৬.৪৩) এর বামপাশে অপসারণ মতবাদ (Divergence Theorem) প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\int_\tau \nabla.(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d\tau = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).\, d\mathbf{a}$$

$$\therefore \qquad \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).\, d\mathbf{a} = -\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) d\tau \qquad (৬.৪৪)$$

উল্লেখ্য যে τ আয়তন S তল দ্বারা আবদ্ধ।

(৬.৪৪) এর ডানপাশের সংকলন হচ্ছে বৈদ্যুতিক ও চুম্বক শক্তির সমষ্টি বা তড়িৎ চুম্বকীয় শক্তি; $\frac{\partial}{\partial t}$ 'একক সময়' নির্দেশ করে এবং (−) চিহ্ন দ্বারা হ্রাসকে (Loss) বুঝানো হয়েছে।

এক কথায় ডানপাশ হচ্ছে τ আয়তন থেকে তড়িৎ চুম্বকীয় শক্তি হ্রাসের হার।

অতএব বামপাশ অবশ্যই τ আয়তন আবদ্ধকারী s তলের মধ্য দিয়ে শক্তির বহির্মুখী ফ্লাক্সের সমষ্টি হবে

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad (৬.৪৫)$$

এ রাশিটিকে পয়েন্টিং ভেক্টর (pointing vector) বলে এবং এর একক ওয়াট/মিটার²। এটি লক্ষণীয় যে $\mathbf{S}$ ভেক্টর তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক নির্দেশ করে এবং এটি সব সময়ই $\mathbf{E}$ ও $\mathbf{H}$ এর তলের উপর লম্বিক।

মুক্তস্থানে কোনো বিন্দুতে পয়েন্টিং ভেক্টরের তাৎক্ষণিক মান $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ অথবা (৬.৩৬) সমীকরণ অনুসারে

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 C} E^2 \mathbf{k} = \varepsilon_0 C E^2 \mathbf{k} \qquad (৬.৪৬)$$

একটি সমতল সাইন তরঙ্গের জন্য $\mathbf{S}$ এর গড় মান হবে

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{av} &= C\,\varepsilon_0\, E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} C\,\varepsilon_0\, E_0^2\,\mathbf{k} \\ &= 2.66 \times 10^{-3}\; E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (৬.৪৭)$$

৬.৫ পদার্থে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ (Propagation of Plane Electromagnetic Waves in Matter)

আমরা এখন সমসত্ত্ব (homogeneous) দিক নিরপেক্ষ (isotropic) রৈখিক (linear) এবং স্থির (stationary) মাধ্যমে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ সম্পর্কে আলোচনা করব। একটি মাধ্যম সমসত্ত্ব হবে যদি এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে এর ধর্মের কোনো পরিবর্তন না হয় ; এটি দিক নিরপেক্ষ যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সকল দিকে এর ধর্মগুলি একই থাকে। এটি দিক নিরপেক্ষ ও রৈখিক যদি নিম্নোক্ত সম্পর্কগুলি সত্য হয়।

$$\mathbf{D} = k_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad (৬.৪৮)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{k_m \mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \qquad (৬.৪৯)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (৬.৫০)$$

যেখানে k_e ডাই-ইলেকট্রিক সহগ, k_m আপেক্ষিক প্রবেশ্যতা এবং σ পরিবাহকত্ব, ক্ষেত্র তীব্রতা ও দিকের উপর নির্ভরশীল নয়। কেলাসী মাধ্যমগুলি সাধারণত অদিক নিরপেক্ষ। যেহেতু মাধ্যমটি সমসত্ত্ব কল্পনা করা হয়েছে, k_e, k_m এবং σ স্থানাংকের উপরও নির্ভরশীল নয়। এখন থেকে আমরা $k_e \varepsilon_0$ এর পরিবর্তে ε এবং $k_m \mu_0$ এর পরিবর্তে μ লিখব। ε ও μ রাশিদ্বয় যথাক্রমে মাধ্যমের অনুমোদিতা ও প্রবেশ্যতা। একটি মাধ্যমকে স্থির ধরা হয় যদি এটি ব্যবহৃত স্থানাংক পদ্ধতির সাপেক্ষে স্থির হয়।

৬.৬ সমসত্ত্ব, দিক নিরপেক্ষ, রৈখিক ও স্থির মাধ্যমে ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহ (E, H, D ও B) এর তরঙ্গ সমীকরণ : (The Wave Equation of Field Vectors E, H, D & B in Homogeneous, Isotropic, Linear and Stationary Media.)

৬.১ অনুচ্ছেদে আমরা মুক্তস্থানের জন্য ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহের তরঙ্গ সমীকরণ বের করেছি ; একইভাবে আমরা আরো সাধারণ অবস্থা তথা সমসত্ত্ব, দিক নিরপেক্ষ, রৈখিক এবং স্থির মাধ্যমের জন্য অগ্রসর হবো।

এখানে আমরা ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ নিয়ে আরম্ভ করব :

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho \qquad (৬.৫১)$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad (৬.৫২)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (৬.৫৩)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৬.৫৪)$$

সমীকরণ (৬.৫৩) এর কার্ল নিয়ে আমরা পাই

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$\nabla(\nabla.\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \qquad [\because \ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}]$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \qquad [\text{সমীকরণ (৬.৫৪) অনুসারে}]$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad [\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E} \text{ এবং } \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}]$$

$$= -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla.\mathbf{E}) \qquad (৬.৫৫)$$

এখন সমীকরণ (৬.৫১) ব্যবহার করে

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \qquad \begin{bmatrix} \because \ \nabla.\mathbf{D} = \rho \\ \varepsilon\,\nabla.\mathbf{E} = \rho \\ \because \ \nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{bmatrix} \qquad (৬.৫৬)$$

উপরিউক্ত সমীকরণের ডানপাশের প্রথম পদটি পরিবহণ প্রবাহ ঘনত্ব $\sigma\mathbf{E}$ হতে এবং দ্বিতীয় পদটি সরণ প্রবাহ ঘনত্ব $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ থেকে এসেছে

আবার (৬.৫৪) সমীকরণটির কার্ল নিয়ে :

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{ইত্যাদি}$$

সুতরাং ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ (৬.৫১) থেকে আমরা পাই

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

বা $$\left(\mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z}\right).(\mathbf{i}\ E_x + \mathbf{j}\ E_y + \mathbf{k}\ E_z) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

বা $$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (৬.৬১)$$

$\therefore$ $$\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) = \mathbf{k}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \quad (৬.৬২)$$

অতএব **E** ভেক্টরের তরঙ্গ সমীকরণ (৬.৫৬) এর আকার দাঁড়ায় :

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

বা $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{i}\ E_x + \mathbf{j}\ E_y + \mathbf{k}\ E_z) = \left(\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\mathbf{i}\ E_x + \mathbf{j}\ E_y + \mathbf{k}\ E_z) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

সমীকরণ (৬.৬১) প্রয়োগ করে

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{i}\ E_x + \mathbf{j}\ E_y) + \mathbf{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_z = \mu\left(\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\mathbf{i}\,E_x + \mathbf{j}\,E_y + \mathbf{k}\ E_z) + \mathbf{k}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

বা $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{i}\ E_x + \mathbf{j}\ E_y) = \mu\left(\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\mathbf{i}\,E_x + \mathbf{j}\,E_y + \mathbf{k}\ E_z) \quad (৬.৬৩)$$

উভয়পক্ষ থেকে **k**–এর সহগগুলি সমীকৃত করে আমরা পাই,

$$\mu\left(\sigma\frac{\partial E_z}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\right) = 0$$

বা $$\sigma\frac{\partial E_z}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (৬.৬৪)$$

ধরা যাক, $$E_z = Ae^{mt}$$

$\therefore$ $$\frac{\partial E_z}{\partial t} = m\,Ae^{mt} \quad (৬.৬৫)$$

এবং $$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = m^2 Ae^{mt} \quad (৬.৬৬)$$

এখন (৬.৬৪) সমীকরণে (৬.৬৫) ও (৬.৬৬) সমীকরণদ্বয় প্রয়োগ করে :

$$(\sigma m + \varepsilon m^2)\,Ae^{mt} = 0$$

বা $$m(\sigma + \varepsilon m) = 0 \qquad [\because\ Ae^{mt} \neq 0]$$

$\therefore$ $$m = 0, \quad m = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

নির্ণেয় সমাধান,

$$E_z = ae^{0xz} + be^{-\sigma t/\varepsilon} = a + be^{-\sigma t/\varepsilon} \qquad (৬.৬৭)$$

এখানে a ও b ধ্রুবক যারা সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়। (৬.৬৭) সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে E_z এর মান সময়ের সাথে সূচকভাবে (exponentially) হ্রাস পেয়ে পরিশেষে ধ্রুবক a তে পরিণত হয়। আবার যদি $\sigma = 0$ (অপরিবাহী মাধ্যমে) হয় তবে $E_z = a + b = C$ (একটি ধ্রুবক) হবে। স্পষ্টত কোনো অবস্থাতেই E_z কে তরঙ্গরূপে ধরা যায় না। কাজেই আমরা ধরতে পারি,

$$E_z = 0 \qquad (৬.৬৮)$$

যেহেতু তরঙ্গ সঞ্চারণই আমাদের একমাত্র আলোচ্য বিষয় উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে দেখা যায়, একটি সমতল তরঙ্গের জন্য বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র ভেক্টরের লম্বিক উপাংশ (E_z) অবর্তমান, কাজেই এর শুধু আড়াআড়ি উপাংশগুলি (E_x, E_y) থাকতে পারে। অন্য ভাষায় বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র ভেক্টর **E**, তরঙ্গ সঞ্চারণ দিকের সাথে আড়াআড়ি। আবার (৬.৬১) ও (৬.৬৫) সমীকরণ থেকে (পরিবাহী মাধ্যমে সমতল তরঙ্গের জন্য) আমরা পাই

$$\rho = 0 \qquad (৬.৬৯)$$

এতক্ষণের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের জন্য

(ক) আমরা ধরতে পারি $\rho = 0$ এবং

(খ) **E** ভেক্টর আড়াআড়ি।

আবার সহজেই দেখানো যেতে পারে যে, **H** ভেক্টরও আড়াআড়ি ; (৬.৫২) সমীকরণ থেকে :

$$\nabla.\mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \qquad (৬.৭০)$$

অতএব $H_z \neq f(z)$ এবং যদি আমরা শুধু তরঙ্গকে বিবেচনা করি তবে ধরতে পারি

$$H_z = 0 \qquad (৬.৭১)$$

অর্থাৎ **H** ভেক্টরও আড়াআড়ি। সুতরাং কোনো সমসত্ত্ব, দিক নিরপেক্ষ, রৈখিক ও স্থির মাধ্যমে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ আড়াআড়ি।

উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল, **E** এবং **H** আড়াআড়ি। এখন দেখা যাক এদের আপেক্ষিক দিগাবস্থা কেমন।

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ (৬.৫৩) থেকে :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

অর্থাৎ
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

বা
$$-\mathbf{i}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (৬.৭২)$$

এখন +z অক্ষ বরাবর সঞ্চারিত **E** ও **B** ক্ষেত্র ভেক্টরদ্বয়কে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করা যেতে পারে :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - kz) \qquad (৬.৭৩)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp j(\omega t - kz) \qquad (৬.৭৪)$$

যেখানে ω কৌণিক কম্পন এবং k তরঙ্গ সংখ্যা যা সাধারণত জটিল রাশি (complex quantity) হয়। (৬.৭৩) সমীকরণকে z এর সাপেক্ষে এবং (৬.৭৪) সমীকরণকে t এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -jk\,\mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - kz) = -jk\,\mathbf{E} \qquad (৬.৭৫)$$

এবং

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\,\omega\,\mathbf{B}_0 \exp j(\omega t - kz) = -j\,\omega\,\mathbf{B} \qquad (৬.৭৬)$$

অর্থাৎ $\frac{\partial}{\partial z}$ ও $\frac{\partial}{\partial t}$ করকদ্বয়ের পরিবর্তে যথাক্রমে $-jk$ ও $j\omega$ লেখা যেতে পারে। কাজেই (৬.৭২) সমীকরণের আকার দাঁড়ায় :

$$\mathbf{i}\,j\,k\,E_y - \mathbf{j}\,j\,k\,E_x = -\mathbf{i}\,j\,\omega\,B_x - \mathbf{j}\,j\,\omega\,B_y$$

তাহলে,

$$j\,k\,E_y = -j\,\omega\,B_x = -j\,\omega\,\mu\,H_x \qquad (৬.৭৭)$$

$$j\,k\,E_x = j\,\omega\,B_y = j\,\omega\,\mu\,H_y \qquad (৬.৭৮)$$

$$\therefore \qquad -\frac{E_y}{H_x} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} \qquad (৬.৭৯)$$

অতএব E এবং **H** ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্বিক। উদাহরণস্বরূপ, যদি **E** ভেক্টর x অক্ষ বরাবর হয় ($E_y = 0$), তবে **H** ভেক্টর y অক্ষ বরাবর ($H_x = 0$) হবে। তরঙ্গ সংখ্যা k জটিল ভেক্টর হলে **E** এবং **H** একই দশায় থাকবে না। **E** এবং **H** এর দিগাবস্থা এমন যে এদের ভেক্টর গুণন (**E** x **H**) এর দিক তরঙ্গ সঞ্চারণের দিক নির্দেশ করে।

৬.৮ অপরিবাহী মাধ্যমসমূহে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ (Propagation of Plane electromagnetic waves in nonconductors)

অপরিবাহকের পরিবাহকত্ব $\sigma = 0$ এবং সমতল তরঙ্গের জন্য $\rho = 0$। সুতরাং তরঙ্গ সমীকরণদ্বয় (৬.৫৬) ও (৬.৫৮) এর রূপ দাঁড়ায় :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (৬.৮০)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (৬.৮১)$$

অন্তরকলন সমীকরণদ্বয় অহ্রাসকৃত (unattenuated) তরঙ্গের অনুরূপ এবং উভয় ক্ষেত্রেই দশা বেগ u :

$$u = \frac{1}{(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \frac{1}{(k_e k_m)^{1/2}}\frac{1}{(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}} = \frac{C}{(k_e k_m)^{1/2}} \qquad (৬.৮২)$$

অতএব এ ক্ষেত্রে তরঙ্গের বেগ মুক্তস্থানে বেগের তুলনায় কম এবং প্রতিসরাংক n :

$$n = \frac{C}{u} = (k_e k_m)^{1/2} \qquad (৬.৮৩)$$

অচুম্বকীয় মাধ্যমে $\quad k_m = 1$ এবং

$$n = (k_e)^{1/2} \qquad (৬.৮৪)$$

এরূপে আমরা প্রতিসরাংক (n) এবং অচৌম্বক অপরিবাহী মাধ্যমের ডাই-ইলেকট্রিক ধ্রুবক (k_e) এর মধ্যে একটি সহজ সম্পর্ক পাই। আমাদের মনে রাখতে হবে যে, k_e এবং n উভয়ই হলো কম্পনের ফাংশন। উল্লেখ্য, আলোকবিদ্যায় কম্পনের সাথে n এর পরিবর্তনকে বিচ্ছুরণ (dispersion) নামে আখ্যায়িত করা হয়। z অক্ষের যোগবোধক দিকে সঞ্চারিত সমতল তরঙ্গের জন্য **E** এবং **H** উভয়ই x ও y এর উপর নির্ভর করে না, ফলে (৬.৮০) ও (৬.৮১) সমীকরণ দুটি নিম্নরূপ সংক্ষিপ্ত আকার ধারণ করে :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (৬.৮৫)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (৬.৮৬)$$

সমীকরণ (৬.৭৩) থেকে **E** এর মান (৬.৮৫) সমীকরণে বসালে অথবা (৬.৭৪) থেকে $\mathbf{H}\left(=\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)$ এর মান (৬.৮৬) সমীকরণে বসালে আমরা পাই,

$$-k^2 + \omega^2 \mu\varepsilon = 0$$

$$\therefore \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (৬.৮৭)$$

সংজ্ঞানুসারে তরঙ্গ সংখ্যা k :

$$k = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-} = \left(\frac{\lambda\!\!\!^-_0}{\lambda\!\!\!^-}\right)\cdot\frac{1}{\lambda\!\!\!^-_0} = \frac{n}{\lambda\!\!\!^-_0} = \frac{(k_e k_m)^{1/2}}{\lambda\!\!\!^-_0} \qquad (৬.৮৮)$$

বা $\qquad k = \frac{f}{\lambda\!\!\!^-} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{f\lambda}$

$$= \frac{\omega}{u} = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \qquad (৬.৮৯)$$

অপরিবাহী মাধ্যমে k এর মান বাস্তব (Real) বিধায় তরঙ্গের হ্রাস (attenuation) হয় না। (৬.৮৯) থেকে k এর মান (৬.৭৯) সমীকরণে বসালে আমরা পাই,

$$\frac{-E_y}{H_x} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \qquad (৬.৯০)$$

E ভেক্টরকে x অক্ষের সমান্তরাল ধরলে লেখা যায়,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - kz)\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp j(\omega t - kz)\,\mathbf{j} \qquad (৬.৯১)$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - kz)\,\mathbf{j} \quad [\,(৬.৯০) \text{ অনুসারে}\,] \qquad (৬.৯২)$$

অতএব $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের দশা অভিন্ন। আবার (৬.৯১) সমীকরণ থেকে

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}.\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \exp 2j(\omega t - kz) \tag{৬.৯৩}$$

এবং (৬.৯২) সমীকরণ থেকে

$$\frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu \mathbf{H}.\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right) E_0^2 \exp 2j(\omega t - kz)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \exp 2j(\omega t - kz) \tag{৬.৯৪}$$

(৬.৯৩) এবং (৬.৯৪) থেকে দেখা যায় যে, বৈদ্যুতিক শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ এবং চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}\mu H^2$ পরস্পর সমান। অর্থাৎ

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{৬.৯৫}$$

কাজেই মোট তাৎক্ষণিক (Instantaneous) শক্তি ঘনত্ব হলো

$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \varepsilon E^2$ বা μH^2 এবং মোট গড় শক্তি ঘনত্ব হলো

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \varepsilon E^2_{r.m.s} \quad \text{বা} \quad \mu H^2_{r.m.s}$$

পয়েন্টিং ভেক্টরের গড় মান $\mathbf{S}_{av}$:

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2}E_0 H_0 \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} \tag{৬.৯৬}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,\varepsilon E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} \tag{৬.৯৭}$$

এটি হলো দশা বেগ এবং গড় মোট শক্তি ঘনত্বের গুণফল। আবার উপরের সমীকরণটি নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়

$$\mathbf{S}_{av} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}\,E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k}$$

$$= 2.65 \times 10^{-3}\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}\,E^2_{r.m.s}\,\mathbf{k} \tag{৬.৯৮}$$

৬.৯ পরিবাহী মাধ্যমসমূহে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ (Propagation of Plane e.m. waves in Conducting Media)

আমরা এখন z অক্ষ বরাবর প্রবাহিত সমতল তরঙ্গের জন্য ($\rho = 0$, অনুচ্ছেদ ৬.৭ (৬.৫৬) ও (৬.৫৮) সমীকরণদ্বয়ের সমাধান করব। সমতল তরঙ্গের জন্য **E** ও **H** এর তরঙ্গ সমীকরণ দুটি নিম্নরূপ ধারণ করে :

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (৬.৯৯)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} = \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (৬.১০০)$$

(৬.৭৩) থেকে **E** এর মান (৬.৯৯) তে অথবা (৬.৭৪) থেকে $\mathbf{H}\left(=\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right)$ এর মান (৬.১০০) তে প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
-k^2 &= j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \\
&= -\omega^2\mu\varepsilon\left(1 - \frac{j\omega\mu\sigma}{\omega^2\mu\varepsilon}\right) \\
&= -\omega^2(k_e k_m)(\mu_0\varepsilon_0)\left[1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{\omega^2}{c^2}(k_e k_m)\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{(2\pi f)^2}{(f\lambda_0)^2}(k_e k_m)\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{1}{\lambda_0^2}(k_e k_m)\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right] \qquad (৬.১০১)
\end{aligned}$$

এখানে
$$\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{C}{\omega} \qquad (৬.১০২)$$

এবং এটি হলো মুক্তস্থানে সঞ্চারিত তরঙ্গ (যা কৌণিক কম্পন ω) এর রেডিয়ান দৈর্ঘ্য। $j\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$ রাশিটি হলো সরণ প্রবাহ ঘনত্ব $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ এর সাথে পরিবহণ প্রবাহ ঘনত্ব $\sigma\mathbf{E}$ এর অনুপাত। আমরা এই অনুপাতের মডুলাসকে মাধ্যমের Q বলব : অর্থাৎ

$$\begin{aligned}
Q &= \left|\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right| \sigma\mathbf{E}\Bigg| = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \qquad (৬.১০৩) \\
&= \frac{2\pi f k_e\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{k_e 2\pi c\varepsilon_0}{\lambda_0\sigma} \qquad \left[\because f = \frac{C}{\lambda_0}\right] \\
&= (2\times 3.14\times 3\times 10^8\times 8.85\times 10^{-12})\frac{k_e}{\lambda_0\sigma} \\
&= \frac{k_e}{60\lambda_0\sigma} \qquad (৬.১০৪)
\end{aligned}$$

অপরিবাহকের জন্য, $Q \to \infty$, সাধারণ ধরনের পরিবাহকের জন্য আমরা $\sigma = 10^7$ ওহম$^{-১}$/মিটার$^{-১}$ (অর্থাৎ কপারের জন্য $\sigma = 5.8 \times 10^7$) এবং $k_e = 1$ ধরতে পারি। কাজেই সাধারণ পরিবাহকের জন্য Q অনুপাতের মান নগণ্য ; এমনকি নিকট অতিবাঙ্গিত রশ্মি (Near ultra violet ray) এর প্রতিষঙ্গিক তরঙ্গদৈর্ঘ্য ($\lambda_0 = 10^{-7}$ মি:) এর ক্ষেত্রেও।

তাহলে,

$$k^2 = \frac{k_e k_m}{\bar{\lambda}_0^2}\left(1 - \frac{j}{Q}\right)$$

$$\therefore \quad k = \frac{(k_e k_m)^{1/2}}{\bar{\lambda}_0}\left(1 - \frac{j}{Q}\right)^{1/2} \qquad (৬.১০৫)$$

অর্থাৎ তরঙ্গ সংখ্যা k হলো জটিল রাশি ; ধরা যাক,

$$k = k_r - j\,k_i$$

$$\therefore \quad k_r - j\,k_i = \frac{(k_e k_m)^{1/2}}{\bar{\lambda}_0}\left(1 - \frac{j}{Q}\right)^{1/2} \qquad (৬.১০৬)$$

বা
$$k_r^2 - k_i^2 - 2j\,k_r k_i = \frac{k_e k_m}{\bar{\lambda}_0^2}\left(1 - \frac{j}{Q}\right)$$

$$\therefore \quad k_r^2 - k_i^2 = \frac{k_e k_m}{\bar{\lambda}_0^2} \qquad (৬.১০৭)$$

এবং
$$2\,k_r k_i = \frac{k_e k_m}{\bar{\lambda}_0^2}\cdot\frac{1}{Q} \qquad (৬.১০৮)$$

এখন
$$(k_r^2 + k_i^2)^2 = (k_r^2 - k_i^2)^2 + 4\,k_r^2 k_i^2$$
$$= \frac{(k_e k_m)^2}{\bar{\lambda}_0^4}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)$$ [(৬.১০৭) ও (৬.১০৮) অনুসারে]

$$\therefore \quad k_r^2 + k_i^2 = \frac{k_e k_m}{\bar{\lambda}_0^2}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} \qquad (৬.১০৯)$$

(৬.১০৭) – (৬.১০৯) থেকে

$$k_r = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{k_e k_m}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2} \qquad (৬.১১০)$$

(৬.১০৯) – (৬.১০৭) থেকে

$$k_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left(\frac{k_e k_m}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2} \qquad (৬.১১১)$$

$$\therefore \quad k = \sqrt{k_r^2 + k_i^2}\,\exp\left[-j\tan^{-1}\frac{k_i}{k_r}\right]$$

$$= \frac{(k_e k_m)^{1/2}}{\bar{\lambda}_0}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}\exp\left[-j\tan^{-1}\frac{k_i}{k_r}\right] \qquad (৬.১১২)$$

শূন্য মাধ্যমে $\quad k_r = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}_0}, \quad k_i = 0$

তরঙ্গ সংখ্যার বাস্তব অংশ $k_r = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{2\pi}{\lambda}$. λ মাধ্যমের তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কাল্পনিক অংশ $k_i = \frac{1}{\delta}$, δ = যে দূরত্বে তরঙ্গের বিস্তার e–উৎপাদকে হ্রাস পায়। $\delta = \frac{1}{k_i}$ রাশিকে হ্রাস দূরত্ব (attenuation distance) বলা হয়।

আবার দশা বেগ u :

$$u = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\left[\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}_0}\left(\frac{k_e k_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^2+1\right\}^{1/2}\right]} \tag{৬.১১৩}$$

এবং প্রতিসঙ্গিক প্রতিসরাংক n :

$$n = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega} k_r = \lambda\!\!\!^{-}_0 k_r \frac{\lambda\!\!\!^{-}_0}{\lambda\!\!\!^{-}} \tag{৬.১১৪}$$

পুনরায় $\frac{E}{H}$ অনুপাতটি (৬.৭৯) থেকে

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{k}$$
$$= \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} \exp(j\theta) \tag{৬.১১৫}$$

যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k_i}{k_r}\right)$ (৬.১১৬)

হলো **H** এর সম্পর্কে **E** এর দশা। সুতরাং **E** ভেক্টরকে x অক্ষের সমান্তরাল ধরলে লেখা যায়,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - k Z)\,\mathbf{i}$$
$$= \mathbf{E}_0 \exp\{j(\omega t - k_r z) - k_i z\}\,\mathbf{i} \tag{৬.১১৭}$$

অনুরূপভাবে, $\quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\{j(\omega t - k_r z - \theta) - k_i z\}\,\mathbf{j}$ (৬.১১৮)

এখানে $\quad \frac{E_0}{H_0} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}}$ (৬.১১৯)

বৈদ্যুতিক এবং চৌম্বক শক্তি ঘনত্বের অনুপাত

$$\left|\frac{\frac{1}{2}\varepsilon E^2}{\frac{1}{2}\mu H^2}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}} \tag{৬.১২০}$$

এবং গড় মোট শক্তি ঘনত্ব

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\ E_0{}^2 + \frac{1}{2}\mu\ H_0{}^2\right]\ \exp(-2\,k_i\,z)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\ E_0{}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\ E_0{}^2\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right]\exp(-2\,k_i\,z)\ \ [\text{(৬.১২০) অনুসারে}]$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\,E_0{}^2\left\{1+\left(\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right\}\exp(-2k_i\,z) \qquad (৬.১২১)$$

৬.১০ পরিবাহী মাধ্যমে পয়েন্টিং ভেক্টর (Poynting Vector in Conducting Media)

(৬.৫৩) সমীকরণের সাথে **H** ভেক্টরের স্কেলার গুণফল নিলে আমরা পাই

$$\mathbf{H}.(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (৬.১২২)$$

আবার (৬.৫৪) সমীকরণের সাথে **E** ভেক্টরের স্কেলার গুণফল নিয়ে

$$\mathbf{E}.(\nabla\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}.\mathbf{J}+\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৬.১২৩)$$

(৬.১২২) থেকে (৬.১২৩) বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$\mathbf{H}.(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}.(\nabla\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}.\mathbf{J} \qquad (৬.১২৪)$$

$$\therefore\ \nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}.\mathbf{J}$$ [১.১২ অনুচ্ছেদের ৫নং অভেদ অনুসারে] (৬.১২৫)

এখন $\mathbf{E}.\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}.\dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) = \varepsilon\,\mathbf{E}.\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ $[\because\ \mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}]$

কিন্তু $\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}^2) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}.\mathbf{E}) = \mathbf{E}.\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{E}.\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 2\,\mathbf{E}.\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$$\therefore\quad \mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\ E^2\right) \qquad (৬.১২৬)$$

এরূপে $$\mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\ H^2\right) \qquad (৬.১২৭)$$

(৬.১২৫), (৬.১২৬) এবং (৬.১২৭) থেকে

$$\nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\ E^2+\frac{1}{2}\mu\ H^2\right)-\mathbf{E}.\mathbf{J} \qquad (৬.১২৮)$$

এখানে উল্লেখ্য যে,

$\frac{1}{2}\varepsilon\,E^2$ = বৈদ্যুতিক শক্তি ঘনত্ব

$\frac{1}{2}\mu\,H^2$ = চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \text{তড়িৎ চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) = \text{সময়ের সাথে তড়িৎ চৌম্বক শক্তি ঘনত্বের পরিবর্তনের হার।}$$

$\mathbf{E.J}$ = একক আয়তনে জৌল-তাপীয় হার [নিম্নে প্রমাণ করা হলো] ।

আমরা জানি জৌল্-তাপীয় হার, $P = I^2R$

এখন $\mathbf{E.J} = \mathbf{E}.\sigma\mathbf{E} = \sigma E^2$ $\quad [\because \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}]$

$= \sigma\frac{v^2}{l^2}$ $\quad [\because \mathbf{E} = \frac{v}{l}$, v = বিভব এবং l = দৈর্ঘ্য]

$= \sigma\frac{I^2R^2}{l^2}$ $\quad [\because v = IR$, R = রোধ এবং I = প্রবাহ]

$= \left(\frac{\sigma R}{l^2}\right)I^2R$

$= \sigma\left(\frac{\rho l}{Al^2}\right)P$ $\quad [\because R = \frac{\rho l}{A}$, ρ = আপেক্ষিক রোধ এবং A = ক্ষেত্রফল]

$= \left(\frac{\sigma l}{\sigma Al^2}\right)P$ $\quad [\because \rho = \frac{1}{\sigma}]$

$= \frac{P}{Al}$

যেহেতু Al হলো মাধ্যমের আয়তন

$\therefore$ $\mathbf{E.J}$ একক আয়তনে জৌল-তাপীয় হার।

(৬.১২৮) সমীকরণকে S তল দ্বারা আবদ্ধ τ আয়তন ব্যাপী সংকলন করলে আমরা পাই,

$$\int_\tau \nabla.(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,d\tau = -\frac{d}{dt}\int_\tau\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)d\tau \quad \int_\tau(\mathbf{E.J})\,d\tau$$

বামপক্ষে অপসারিতা মতবাদ প্রয়োগ করে

$$\oint_s(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,da = -\frac{d}{dt}\int_\tau\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)d\tau - \int_\tau(\mathbf{E.J})\,d\tau \qquad (৬.১২৯)$$

সুতরাং উপরিউক্ত সমীকরণে ডানপক্ষের প্রথম পদ বুঝায় τ আয়তনের তড়িৎ চৌম্বকীয় শক্তি হ্রাসের হার এবং দ্বিতীয় পদ বুঝায় একই আয়তন থেকে জৌল্-তাপীয় ক্রিয়ার মাধ্যমে তড়িৎ চৌম্বকীয় শক্তি হ্রাসের হার।

এরূপে পয়েন্টিং ভেক্টর $(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ বলতে বুঝায় s তল ছেদনকারী শক্তির বহির্মুখী ফ্লাক্স (৬.৪৪ সমীকরণের বর্ণনা অনুসারে)

আমরা এখন $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ এর দশা ভিন্ন বিবেচনা করে (সাধারণত যা ঘটে থাকে) ভেক্টর গুণফল $(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ এর গড় নির্ণয় করব। যেহেতু ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্বিক (৬.৭ অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য),

$$\left| \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right| = EH \sin 90 = EH \qquad (৬.১৩০)$$

এখন আমরা EH গুণফলের মান নির্ণয় করতে চাই,

E এবং **H** ভেক্টরদ্বয়কে সূচক ফাংশন হিসেবে প্রকাশ না করে বরং কোসাইন ফাংশন হিসেবে প্রকাশ করব। অর্থাৎ আমরা (৬.১১৭) এবং (৬.১১৮) সমীকরণদ্বয়ের পরিবর্তে **E** ও **H** ভেক্টর দুটিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করব।

$$E = E_0 \exp(-k_i z) \cos(\omega t - k_r z) \qquad (৬.১৩১)$$

$$H = H_0 \exp(-k_i z) \cos(\omega t - k_r z - \theta) \qquad (৬.১৩২)$$

$$\therefore \quad EH = E_0 H_0 \exp(-2 k_i z) \cos(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z - \theta)$$

$$= E_0 H_0 \exp(-2 k_i z) \cos(\omega t - k_r z) \{\cos(\omega t - k_r z) \cos\theta + \sin(\omega t - k_r z) \sin\theta\}$$

$$= E_0 H_0 \exp(-2 k_i z) \{\cos^2(\omega t - k_r z) \cos\theta + \cos(\omega t - k_r z) \sin(\omega t - k_r z) \sin\theta\} \qquad (১.৩৩)$$

এখন ধরা যাক, $\omega t - k_r z = \theta'$

তাহলে $\cos^2(\omega t - k_r z) = \cos^2\theta'$ এবং

$\cos^2\theta'$ এর গড় মান $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta' \, d\theta'$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2\theta'] \, d\theta'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\theta' - \frac{\sin 2\theta'}{2} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \times 2\pi - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \qquad (৬.১৩৪)$$

আবার $\cos(\omega t - k_r z) \sin(\omega t - k_r z) = \cos\theta' \sin\theta'$ এবং

$\cos\theta' \sin\theta'$ এর গড় মান $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta' \sin\theta' \, d\theta'$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sin 2\theta') \, d\theta'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{\cos 2\theta'}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8\pi}[1 - 1] = 0 \qquad (৬.১৩৫)$$

(৬.১৩৪) এবং (৬.১৩৫) এর সাহায্যে (৬.১৩৩) থেকে পাওয়া যায় :

$$S_{av} = E_0 H_0 e^{-2k_i z}\left\{\frac{1}{2}\cos\theta + 0\right\}$$

$$= \frac{1}{2} E_0 H_0 e^{-2k_i z}\cos\theta \qquad (৬.১৩৬)$$

সমীকরণ (৬.১১৬) থেকে আমরা পাই,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k_i}{k_r}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right\}^{1/2}}{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\}^{1/2}}\right]$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \cos\tan^{-1}\left[\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right\}^{1/2}}{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\}^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\left[1 + \frac{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right\}}{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\}}\right]^{1/2}} \qquad \left[\because \cos\tan^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$= \frac{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\}^{1/2}}{\left[\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\} + \left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right\}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right\}^{1/2}}{2^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} \qquad (৬.১৩৭)$$

(৬.১১৯) থেকে H_0 এর মান এবং (৬.১৩৭) থেকে $\cos\theta$ এর মান (৬.১৩৬) এ বসালে পাওয়া যায় :

$$S_{av} = \frac{1}{2} E_0 \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} E_0 \frac{\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2}}{2^{1/2}\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} e^{-2k_i z}$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2} e^{-2k_i z} E_0^2 \qquad (৬.১৩৮)$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right]^{1/2} e^{-2kiz}\, E^2_{r.m.s} \qquad (৬.১৩৯)$$

এরূপে পয়েন্টিং ভেক্টরের গড়মান তরঙ্গের বিস্তারের বর্গের সাথে সমানুপাতিক।

আবার (৬.১১৮) সমীকরণ থেকে

$$\mathbf{H}^* = H_0 \exp[-j(\omega t - k_r z - \theta) - k_i z]\,\mathbf{j} \qquad (৬.১৪০)$$

যেখানে $\mathbf{H}^*$ হলো H এর জটিল যুগ্ম।

সুতরাং (৬.১১৭) ও (৬.১৪০) থেকে

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \{E_0 \exp j(\omega t - k_r z)\, e^{-kiz}\,\mathbf{i}\} \times \{H_0 \exp - j(\omega t - k_r z)\, e^{-j\theta} e^{-kiz}\,\mathbf{j}\}$$

$$= E_0 H_0 e^{-2kiz} e^{-j\theta}\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}E_0 H_0 e^{-2kiz}\cos\theta\,\mathbf{k} \qquad (৬.১৪১)$$

এখানে R_e হলো বাস্তব অংশ।

অতএব (৬.১৩৬) এবং (৬.১৪১) থেকে লেখা যায়

$$S_{av} = \frac{1}{2}R_e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \qquad (৬.১৪২)$$

S_{av} নির্ণয়ের জন্য এটিই হলো সবচেয়ে সহজ সম্পর্ক। পরিশেষে সমীকরণ (৬.১২১) কে সমীকরণ (৬.১১৩) দ্বারা গুণ করে পাই,

$$(\text{গড় শক্তি ঘনত্ব}) \times (\text{দশা বেগ}) = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2\left\{1+\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right\}\exp(-2k_i z)$$

$$\times \frac{\omega}{\left[\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{k_e k_m}{2}\right)^{1/2}\left\{\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}+1\right\}^{1/2}\right]}$$

$$= \left\{1+\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right\}^{1/2}\exp(-2k_i z)\,\frac{1}{4}\varepsilon\,\mathbf{E}_0^2\,\frac{2\pi\, f2^{1/2}}{\frac{2\pi}{\lambda_0}(k_e k_m)^{1/2}}$$

$$= \left\{1+\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right\}^{1/2}\exp(-2k_i z)\,\frac{1}{2^{3/2}}\varepsilon E_0^2\,\frac{1}{(\mu\varepsilon)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\left\{1+\left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}\right\}^{1/2}\exp(-2k_i z)\,E_0^2 \qquad (৬.১৪৩)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because\ f\lambda_0 = C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \ \text{এবং} \\ \frac{1}{\sqrt{k_e k_m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \end{array}\right]$$

অতএব (৬.১৩৮) এবং (৬.১৪৩) থেকে পাই

$$S_{av} = (\text{গড় শক্তি ঘনত্ব}) \times (\text{দশা বেগ}) \qquad (৬.১৪৪)$$

এরূপে আমরা সাধারণ অবস্থার জন্যও বলতে পারি যে, u দশা বেগে গড় শক্তি ঘনত্ব সঞ্চারিত হয়।

৬.১১ সুপরিবাহী মাধ্যমসমূহে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ (Propagation of Plane Electromagnetic Waves in Good Conducting Media)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে পরিবাহী মাধ্যমের জন্য k_r এবং k_i এর মান বের করা হয়েছে (সমীকরণ (৬.১১০) ও (৬.১১১))। সুপরিবাহী মাধ্যমের জন্য এদের মান খুব সহজভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে যেহেতু এক্ষেত্রে $Q << 1$ এবং

$$\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} \pm 1\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{Q}(1 + Q^2)^{1/2} \pm 1\right]^{1/2}$$

$$\approx \left[\frac{1}{Q}\left(1 + \frac{Q^2}{2}\right) \pm 1\right]^{1/2}$$

$$\approx \left(\frac{1}{Q}\right)^{1/2}\left[\left(1 + \frac{Q^2}{2} \pm Q\right)\right]^{1/2}$$

$$\approx \left(\frac{1}{Q}\right)^{1/2}(1 \pm Q)^{1/2}$$

$$\approx \left(\frac{1}{Q}\right)^{1/2}\left(1 \pm \frac{Q}{2}\right)$$

$$\approx \left(\frac{1}{Q}\right)^{1/2} \qquad (৬.১৪৫)$$

ধরা যাক, $$Q = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \leq 50 \qquad (৬.১৪৬)$$

(৬.১৪৬) এর জন্য পরিবাহী ভ্রান্তি (error) শতকরা এক ভাগেরও কম। (৬.১৪৬) এর অর্থ হলো পরিবাহী প্রবাহ ঘনত্ব ($\sigma \mathbf{E}$), কমপক্ষে সরণ প্রবাহ ঘনত্ব $\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$ এর তুলনায় ৫০ গুণ বড়।

যে সমস্ত পরিবাহকের জন্য (৬.১৪৬) সমীকরণ সিদ্ধ তাদেরকে সুপরিবাহী বলা হয়। এ সংজ্ঞানুসারে কপারের (তামা) 2×10^{16} হার্টজ কম্পন পর্যন্ত একটি সুপরিবাহক।

সুপরিবাহকের জন্য (৬.১২৫) সমীকরণের রূপ দাঁড়ায়

$$k = \frac{(k_e k_m)^{1/2}}{\lambda\!\!\!^-_0}\left(-\frac{j}{Q}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{(k_e\, k_m)^{1/2}}{c/\omega}\left(-\frac{j}{\omega\varepsilon/\sigma}\right)^{1/2} \qquad \left[\because\ \lambda\!\!\!^-_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{f\lambda_0}{2\pi\, f} = \frac{C}{\omega}\right]$$

$$= (\mu_0\, \varepsilon_0\, k_e\, k_m)^{1/2}\, \omega\left(\frac{-j\sigma}{\omega\ \varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$= (\mu\, \varepsilon)^{1/2}\, \omega\left(-j\,\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)$$

$$= (-j\ \omega\, \mu\ \sigma)^{1/2} \qquad (৬.১৪৭)$$

ধরা যাক,

$$k = k_r - j\,k_i = (-j\,\omega\,\mu\,\sigma)^{1/2}$$

$\therefore \quad (k_r - j\,k_i)^2 = -j\,\omega\,\mu\,\sigma$

বা $\quad k_r^2 - k_i^2 - j\,2k_r\,k_i = -j\,\omega\,\mu\,\sigma$

$\therefore \quad k_r^2 - k_i^2 = 0 \quad$ বা, $\; k_r = k_i$ (৬.১৪৮)

এবং $\quad 2\,k_r\,k_i = \omega\,\mu\,\sigma$

$\therefore \quad k_r = k_i = \left(\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}\right)^{1/2}$ (৬.১৪৯)

$$\therefore \quad k = k_r - j\,k_i = \left(\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}\right)^{1/2} - j\left(\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}\right)^{1/2}(1-j) \tag{৬.১৫০}$$

$$= (\omega\,\mu\,\sigma)^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (\omega\,\mu\,\sigma)^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (\omega\,\mu\,\sigma)^{1/2}\,e^{-j\pi/4} \tag{৬.১৫১}$$

(৬.১৪৯) থেকে হ্রাস দূরত্ব :

$$\delta = \frac{1}{k_i} = ƛ = \frac{1}{\left(\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}\right)^{1/2}} = \left(\frac{2}{\omega\,\mu\,\sigma}\right)^{1/2} \tag{৬.১৫২}$$

আবার (৬.১৫০) ও (৬.১৫২) থেকে

$$k = \frac{1-j}{\delta} \tag{৬.১৫৩}$$

এবং (৬.৭৯) ও (৬.১৫১) থেকে

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\,\mu}{k} = \frac{\omega\,\mu}{(\omega\,\mu\,\sigma)^{1/2}\,e^{-j\pi/4}}$$

$$= \left(\frac{\omega\,\mu}{\sigma}\right)^{1/2} e^{j\pi/4} \tag{৬.১৫৪}$$

সুতরাং সুপরিবাহকে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা **E** চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতা **H** এর তুলনায় $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ানে অগ্রগামী থাকে। সুপরিবাহী মাধ্যমে **E** এবং **H** এর আপেক্ষিক বিস্তার কম্পনের উপর নির্ভর করে ; কিন্তু **E** এর মান **H** এর মান অপেক্ষা অনেক ছোট। উদাহরণস্বরূপ, 1 mH, কম্পনে তামার জন্য $\frac{E}{H}$ এর মান প্রায় 10^{-3}, অথচ বায়ুতে এই অনুপাতটির মান 377 ।

সমীকরণ (৬.১১৭), (৬.১৫৩) এবং (৬.১৫৪) থেকে আমরা পাই —

$$\mathbf{E} = E_0 \exp[j(\omega t - k_r z) - k_i z]\,\mathbf{i}$$

$$= E_0 \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{z}{\delta}\right)\right]\mathbf{i} \qquad (৬.১৫৫)$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\sigma}{\omega\mu}\right)^{1/2}\mathbf{E}\, e^{-j\pi/4}\,\mathbf{j}$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\omega\mu}\right)^{1/2} E_0 \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{z}{\delta}\right]\mathbf{j} \qquad (৬.১৫৬)$$

অথবা কোসাইন ফাংশন সহযোগে

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\mathbf{i} \qquad (৬.১৫৭)$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\sigma}{\omega\mu}\right)^{1/2} E_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}$$

$$= H_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j} \qquad (৬.১৫৮)$$

$$= H_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z + \lambda/8}{\delta}\right)\mathbf{j}\left[\because \delta = ƛ \text{ এবং } \pi = \frac{\lambda}{2\delta}\right] \qquad (৬.১৫৯)$$

এক রেডিয়ান দৈর্ঘ্য $ƛ$ এ তরঙ্গের বিস্তার হ্রাস পায় $\frac{1}{e} = 0.368$ উৎপাদকে, এবং এক তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ এ হ্রাস পায় $\left(\frac{1}{e}\right)^{2\pi} = 2 \times 10^{-3}$ উৎপাদকে, অথচ পয়েন্টিং ভেক্টরের ক্ষেত্রে এই হ্রাসের উৎপাদক $ƛ$ এবং λ এ যথাক্রমে $\left(\frac{1}{e}\right)^2 = 0.135$ এবং $\left(\frac{1}{e}\right)^{4\pi} = 4\times10^{-6}$। অতএব দেখা গেল যে এক্ষেত্রে হ্রাস অত্যন্ত দ্রুত। সাধারণত পরিবাহকে হ্রাস দূরত্বকে ত্বক গভীরতা (skin depth) বা প্রবেশ গভীরতা (depth of penetration) বলে।

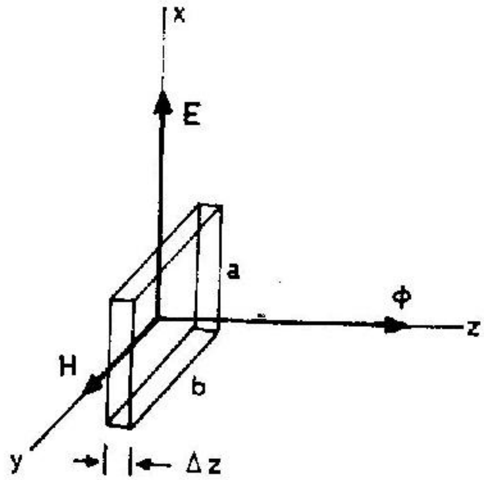
(৬.১৫২) সমীকরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে, পরিবাহকত্ব σ, প্রবেশ্যতা k_m বা কম্পন f বৃদ্ধি পেলে ত্বক গভীরতা δ এর মান কমে যায়। সুতরাং অত্যন্ত পাতলা ফিল্মের আকার ব্যতীত সব সময়েই সুপরিবাহকসমূহ আলোতে অস্বচ্ছ (opaque) । অবশ্য এর অর্থ এই নয় যে, নিম্ন কম্পনে যেসব বস্তু অপরিবাহী তারা আলোক কম্পনে (Optical frequency) স্বচ্ছ। সুপরিবাহকে দশা বেগ u :

$$u = \frac{\omega}{k_r} = \omega\,\delta = \omega\,ƛ$$

$$= \omega\left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2 \times \omega}{\mu\sigma}\right)^{1/2} \qquad (৬.১৬০)$$

$$= \left(\frac{2 \times 2\pi f}{\sigma k_m \mu_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi f}{\sigma k_m \times 4 \times 10^{-7} \times \pi}\right)^{1/2}$$



চিত্র ৬.৪ : একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণের দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থিত একটি ক্ষুদ্রায়তনবিশিষ্ট পরিবাহী মাধ্যম যার ক্ষেত্রফল ab মিটার^2 এবং পুরুত্ব ∇z।

যদি আস্তরণের বামপাশের পৃষ্ঠে E এর বিস্তার E_0 হয় তবে ডান পাশের পৃষ্ঠে এর মান $E_0\, e^{-\Delta z/\delta}$, এবং আস্তরণের মধ্যে S_{av} এর মান হ্রাস পায়

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{2\pi\omega}\right)^{1/2} E_0^{\,2} \text{ থেকে } \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E_0^{\,2}\, e^{-2\Delta z/\delta} \text{ তে।}$$

অতএব আস্তরণের মধ্যস্থিত তরঙ্গের প্রতি সেকেন্ডে হারানো শক্তির গড় –

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms} - ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms}\, e^{-2\Delta z/\delta}$$

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms}\left[1 - e^{-2z/\delta}\right]$$

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms}\left[1 - \left\{1 - \frac{2\Delta z}{\delta} + \ldots\right\}\right], \text{ যদি } \Delta z << \delta \text{ হয়।}$$

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms}\, \frac{2\Delta z}{\delta} \qquad (৬.১৬৭)$$

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2} E^2_{rms}\, \frac{2\Delta z}{(2/\omega\mu\sigma)^{1/2}} \qquad [\,(৬.১৫২) \text{ অনুসারে}\,]$$

$$= ab\left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{1/2}(2\omega\mu\sigma)^{1/2}\,\Delta z\,E^2_{r.m.s} \qquad (৬.১৬৮)$$

$$= ab\sigma\,\Delta z\,E^2_{r.m.s} \quad \text{ওয়াট}$$

$(dS_{av}/dz)\,\Delta z$ নির্ণয়ের মাধ্যমেও এই ফলাফলে উপনীত হওয়া যায়।

আস্তরণের উচ্চতা বরাবর ভোল্টেজের গড় মান

$$V_{rms} = \frac{1}{2}E_0\left(1 + e^{-\Delta z/\delta}\right)a$$

$$= \frac{1}{2}E_0\,a\left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}E_0\,a \qquad (৬.১৬৯)$$

$$= a\,E_{rms} \qquad (৬.১৭০)$$

এবং বিদ্যুৎ প্রবাহের দিকে রোধ –

$$R = \frac{a}{\sigma b\Delta z} \qquad (৬.১৭১)$$

সুতরাং (৬.১৭০) ও (৬.১৭১) থেকে জৌল তাপীয় হ্রাসের গড়

$$p_{av} = \frac{V^2_{r.m.s}}{R} = \frac{a^2\,E^2_{rms}}{(a/\sigma b\Delta z)} = ab\sigma\,\Delta z\;E^2_{rms} \qquad (৬.১৭২)$$

অতএব (৬.১৬৮) ও (৬.১৭২) থেকে দেখা যায় যে, প্রতি সেকেন্ডে তরঙ্গের হারানো শক্তির পরিমাণ এবং জৌল তাপীয় ক্রিয়ার ফলে এ সময়ে মাধ্যমের শক্তি লাভের পরিমাণ সমান।

৬.১৩ নিম্নচাপ আয়নিত গ্যাসে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ (Propagation of Plane Electromagnetic Waves in Low Pressure Ionized Gas)

আমরা দেখেছি যে অপরিবাহকে প্রবাহ সম্পূর্ণরূপে সরণ প্রকৃতির এবং সুপরিবাহকে প্রবাহ প্রধানত পরিবহণ প্রকৃতির হয়ে থাকে। আমরা এখন আয়নিত গ্যাস সম্পর্কে আলোচনা করব যেখানে প্রবাহের উৎপত্তি হয় মুক্ত ইলেকট্রন এবং আয়নের সাথে আপতিত তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গের বৈদ্যুতিক ও চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতার পারস্পরিক বা মিথষ্ক্রিয়ার (Interaction) জন্য। ধরা যাক, গ্যাসের চাপ এমন নিম্ন যে উপাদানগুলির পরস্পরের সংঘর্ষ (collision) তথা শক্তি হ্রাস পায় না। এ শর্তাধীনে আয়নিত গ্যাসে পরিবহণ প্রক্রিয়া ধাতুতে পরিবহণ প্রক্রিয়া হতে সম্পূর্ণ ভিন্ন। কার্বন ধাতুতে কেলাস ল্যাটিস (crystal lattice) এর সাথে পরিবহণ ইলেকট্রনগুলির সংঘর্ষের পরিমাণ অনেক বেশি। আমরা আরো কল্পনা করব যে তাপমাত্রা T শূন্য।

ধরা যাক, একটি সমতল তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ z অক্ষের যোগবোধক দিকে প্রবাহিত হচ্ছে এবং এর E ও H ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষের সমান্তরাল। মনে করি,

একটি আয়নের চার্জ Q, ভর m, বেগ **u** এবং এটি স্থানাংক x, y ও z বিশিষ্ট বিন্দুতে অবস্থিত। তাহলে আয়নটির উপর লরেনৎসের বল হবে

$$\mathbf{f} = Q\,[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \qquad (৬.১৭৩)$$

এখানে $\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{i} = E\mathbf{i}$ এবং $\mathbf{B} = B_y\,\mathbf{j} = B\,\mathbf{j}$

$$\therefore \quad \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,Bu_z + \mathbf{k}\,Bu_x \qquad (৬.১৭৪)$$

(৬.১৭৪) এর সাহায্যে (৬.১৭৩) থেকে

$$\mathbf{f} = Q\,(\mathbf{i}\,E - \mathbf{i}\,Bu_z + \mathbf{k}\,Bu_x) \qquad (৬.১৭৫)$$

$$= Q\left(E\mathbf{i} - B\frac{dz}{dt}\mathbf{i} + B\frac{dx}{dt}\mathbf{k}\right) \qquad (৬.১৭৬)$$

যেখানে $u_z = \frac{dz}{dt}$, $u_x = \frac{dx}{dt}$ এবং

$$\mathbf{f} = \mathbf{i}\,f_x + \mathbf{j}\,f_y + \mathbf{k}\,f_z \qquad \left[\, f_x = m\frac{d^2x}{dt^2},\ f_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \text{ ও } f_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \,\right]$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + m\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + m\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = Q\left(E\mathbf{i} - B\frac{dz}{dt}\mathbf{i} + B\frac{dx}{dt}\mathbf{k}\right)$$

উভয়পক্ষ থেকে যথাক্রমে **i, j** এবং **k** এর সহগগুলি সমীকৃত করে আমরা পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m}\left(E - B\frac{dz}{dt}\right) \qquad (৬.১৭৭)$$

$$= \frac{QE}{m}\left(1 - \frac{1}{C}\frac{dz}{dt}\right) \quad [\because \text{ মুক্তস্থানে } E/B = C\,] \qquad (৬.১৭৮)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad (৬.১৭৯)$$

এবং

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{QB}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{QE}{mc}\frac{dx}{dt} \qquad (৬.১৮০)$$

পুনরায় মনে করা যাক, z অক্ষ বরাবর আয়নের বেগ আলোর বেগের তুলনায় অনেক ছোট, অর্থাৎ

$$\frac{1}{C}\frac{dz}{dt} << 1 \qquad (৬.১৮১)$$

তাহলে, x অক্ষের দিকে বৈদ্যুতিক বলের তুলনায় চৌম্বক বল অত্যন্ত নগণ্য এবং

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m}E = \frac{Q}{m}E_0\cos\omega t \qquad (৬.১৮২)$$

সংকলন করে (Integrating):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\omega m}\,E_0\sin\omega t \qquad (৬.১৮৩)$$

বা

$$x = -\frac{Q}{\omega^2 m}\,E_0\cos\omega t \qquad (৬.১৮৪)$$

(৬.১৮৩) ও (৬.১৮০) থেকে

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{QE}{mc}\frac{dx}{dt} = \frac{QE_0}{mc} \times \frac{Q}{\omega\ m} E_0 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= \frac{Q^2 E_0^2}{2\ \omega m^2\ c} \sin 2\omega t \quad [\because \sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta\ ] \qquad (৬.১৮৫)$$

সংকলন করে (Integrating) :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{Q^2 E_0^2}{4\ \omega^2\ m^2\ c} \cos 2\omega t \qquad (৬.১৮৬)$$

বা
$$z = -\frac{Q^2 E_0^2}{8\ \omega^3 m^2 c} \sin 2\omega t \qquad (৬.১৮৭)$$

আমরা এখন দেখব কোন শর্তাধীনে (৬.১৮১) সমীকরণ অসমতা সিদ্ধ। এজন্য $\frac{1}{C}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ এর মান নির্ণয় করা দরকার। (৬.১৮৬) সমীকরণ থেকে

$$\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max} = \frac{Q^2 E_0^2}{4\ \omega^2\ m^2\ c^2} \qquad (৬.১৮৮)$$

একটি ইলেকট্রনের জন্য, $Q = 1.60 \times 10^{-19}$ কুলম্ব, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ কি.গ্রাম, এবং

$$\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max} = \frac{2.17 \times 10^3}{f^2} E_0^2 \qquad (৬.১৮৯)$$

মনে করি, এক্ষেত্রে গড় পয়েন্টিং ভেক্টরের মান মুক্তস্থানে এর মানের সমান অর্থাৎ ((৬.৪৭) সমীকরণ অনুসারে) $S_{av} = 2.66 \times 10^{-3} \frac{E_0^2}{2}$ (৬.১৯০)

পরবর্তীতে আমরা দেখব (৬.১৩ অনুচ্ছেদ) যে, এটি শুধু উচ্চ কম্পনেই সত্য। তাহলে

$$\frac{1}{c}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max} = 1.63 \times 10^6 \frac{S_{av}}{\delta^2} \qquad (৬.১৯১)$$

অতএব বেগ (dz/dt), S_{av} এর সাথে সমানুপাতিক এবং কম্পনের বর্গের সাথে ব্যস্তানুপাতিক। উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে এটি প্রতীয়মান হয় যে, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{max}$ এর মান আলোর বেগ C অপেক্ষাও বড় হতে পারে। কারণ এক্ষেত্রে আপেক্ষিকতার প্রভাব উপেক্ষা করা হয়েছে। বাস্তবে $\frac{1}{C}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ অনুপাতটির মান সাধারণত 1 অপেক্ষা অনেক ছোট।

৬.১৪ আয়নিত গ্যাসের পরিবাহকতা (Conductivity of an Ionized Gas)

যেহেতু আয়ন তাড়ন বেগ প্রায় সম্পূর্ণভাবে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ এর উপর আরোপ করা যেতে পারে সেহেতু আমরা আয়নিত গ্যাসের পরিবাহকতা σ এরূপে বিবেচনা করতে পারি যেন,

$$\sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}_f \qquad (৬.১৯২)$$

এখানে J_c পরিচালন (convection) প্রবাহ–ঘনত্ব। এখন যদি প্রতি ঘনমিটারে আয়ন বা ইলেকট্রনের সংখ্যা Ni হয়, প্রতি আয়ন বা ইলেকট্রনের চার্জ Q_i এবং x অক্ষ বরাবর তাড়ন বেগ $\left(\frac{dx}{dt}\right)_i$ হয় তাহলে

$$J_c = \sum_i N_i Q_i \left(\frac{dx}{dt}\right)_i \qquad (৬.১৯৩)$$

$$\therefore \qquad \sigma E = \sum_i N_i Q_i \left(\frac{dx}{dt}\right)_i \qquad (৬.১৯৪)$$

(৬.১৮৩) থেকে (dx/dt) এর মান (৬.১৯৪) এ প্রয়োগ করে পাই,

$$\sigma E_0 \cos \omega t = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega\ m_i} E_0 \sin \omega t \qquad (৬.১৯৫)$$

$$= \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega\ m_i} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (৬.১৯৬)$$

বা সূচক চিহ্নে

$$\sigma E_0 e^{j\omega t} = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega\ m_i} E_0 e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \qquad (৬.১৯৭)$$

বা $$\sigma (E_0 e^{j\omega t}) = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{\omega\ m_i} (E_0 e^{j\omega t}) \left(\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

বা $$\sigma = -\frac{j}{\omega} \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{m_i} \qquad (৬.১৯৮)$$

যেহেতু আয়নের ভর ইলেকট্রনের ভরের তুলনায় বহুগুণে বেশি অথচ উভয়ের চার্জ প্রায় সমান, আমরা শুধু ইলেকট্রনের প্রতিষঙ্গিক পদ বিবেচনা করতে পারি,

এরূপে $$\sigma = -j \frac{N_e Q_e^2}{\omega\ m_e} = -j\, 4.47 \times 10^{-9} \frac{N_e}{f} \text{ ওহম/মি:} \qquad (৬.১৯৯)$$

যেখানে N_e প্রতি ঘনমিটারে মুক্ত ইলেকট্রনের সংখ্যা। এখন আমরা এই কাল্পনিক পরিবাহকতার অর্থ বুঝার চেষ্টা করব। কল্পনা করা যাক, একটি কার্বনের ঘন যা দুটি বিপরীত পৃষ্ঠ কপার তড়িৎদ্বার দ্বারা আবৃত। যদি এর আয়ন এক ঘনমিটার হয় তবে তড়িৎদ্বার দুটির মধ্যবর্তী রোধ R′ :

$$\frac{V}{I} = R' = \rho \frac{l}{A} = \rho = \frac{1}{\sigma}$$

যেখানে V প্রযুক্ত ভোল্টেজ, I প্রবাহ, ρ আপেক্ষিক রোধ, l তড়িৎদ্বার দুটির মধ্য দূরত্ব (1 মিটার), A প্রস্থচ্ছেদ (1 বর্গমিটার) এবং σ মাধ্যমের পরিবাহকতা। এরূপে একটি মাধ্যমের পরিবাহকত্ব σ হলো একটি কাল্পনিক ঘন যার প্রত্যেক পাশ ১ মিটার দীর্ঘ) এর দুটি

বিপরীত পৃষ্ঠের মধ্যবর্তী পরিবাহিতা (conductance) $G' = \frac{1}{R'}$, আরো সাধারণভাবে σ হলো তড়িৎদ্বার দুটির মধ্যবর্তী প্রবেশাধিকার (admittance)

$$Y' = \frac{1}{z'} \tag{৬.২০০}$$

বর্তমান আলোচনায় σ হলো কাল্পনিক এবং বিয়োগবোধক ; যেন,

$$z' = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{-j\Big/\left(\frac{N_e Q_e^2}{\omega\, m_e}\right)} = j\frac{\omega\, m_e}{N_e Q_e^2} = j\,\omega\, L' \tag{৬.২০১}$$

যেখানে
$$L' = \frac{m_e}{N_e Q_e^2} \tag{৬.২০২}$$

এবং এটি হলো কাল্পনিক এক ঘনমিটার প্লাজমা এর তুল্য আবেশিকতা (inductance) । L' রাশিটির একক হলো হেনরি মিটার। ইলেকট্রন প্রবাহ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতার তুলনায় $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান পশ্চাদপদ থাকে এবং ইলেকট্রন প্রবাহ হলো আবেশী (inductive) । যেহেতু $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{J}_i$ এর মধ্যে দশান্তর (Phase difference) $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান, স্কেলার গুণফল $\mathbf{E}.\mathbf{J}_i$ ও বিশুদ্ধ কাল্পনিক এবং মাধ্যমে কোনো শক্তি হ্রাস ঘটে না। অর্থাৎ স্পন্দনশীল ইলেকট্রনগুলি ক্ষেত্র হতে মোটের উপর কোনো শক্তি লাভ করে না। স্মরণ থাকে যে, শুরুতে আমরা কল্পনা করেছিলাম, ইলেকট্রনগুলি গ্যাসের অণুর সাথে সংঘর্ষে কোনো শক্তি হারায় না।

আবার যেহেতু $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} = \omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}\,e^{j\pi/2}$ অর্থাৎ সরণ প্রবাহ $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}$ এর তুলনায় $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান অগ্রগামী, অথচ ইলেকট্রন প্রবাহ একই কোণে পশ্চাদপদ থাকে। সুতরাং সরণ ও ইলেকট্রন প্রবাহের মধ্যে দশান্তর π রেডিয়ান এবং মোট প্রবাহ ইলেকট্রনের অনুপস্থিতে যা হতো তা অপেক্ষা এক্ষেত্রে কম। উদাহরণস্বরূপ, যদি একটি ধারকের দুটি পাতের মধ্যে আয়নিত গ্যাস থাকে তবে মোট প্রবাহ ঘনত্ব হবে :

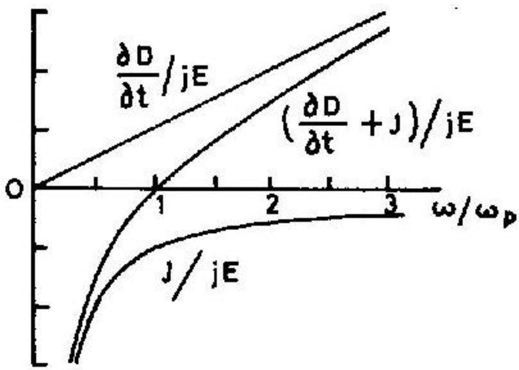
$$\mathbf{J}_t = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = j\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} - j\,\frac{N_e Q_e^2}{\omega\, m_e}\mathbf{E} \tag{৬.২০৩}$$

$$= j\,\omega\,\varepsilon_0\left(1 - \frac{N_e Q_e^2}{\omega^2\,\varepsilon_0\, m_e}\right)\mathbf{E} \tag{৬.২০৪}$$

এটি ৬.৫ চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো।

(৬.২০৪) সমীকরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে, ω এর একটি নির্দিষ্ট ক্রান্তি মানে (critical value) অনুনাদ (resonance) ঘটনা ঘটে যখন মোট প্রবাহ শূন্য।

এ ঘটনার মিল রয়েছে ৬.৬ চিত্রে প্রদর্শিত বর্তনীর বৈশিষ্ট্যের সাথে (বর্তনীতে ধারক ও আবেশক সমান্তরালভাবে সংযুক্ত এবং প্রযুক্ত ভোল্টেজ পরিবর্তনশীল)।



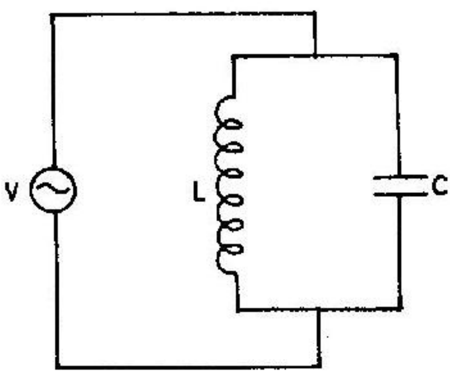
চিত্র ৬.৫ : একটি আয়নিত গ্যাসে সরণ এবং সঞ্চালন প্রবাহ ঘনত্ব বৃত্তাকার কম্পন ω এর ফাংশন হিসেবে চিত্রায়িত।

যদি ধারকের পাতদ্বয়ের ক্ষেত্রফল S এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব s হয়, তাহলে বর্তনীতে মোট প্রবাহ :

$$I = j\,\omega\,\varepsilon_0\,S\left(\frac{V}{s}\right) + \frac{N_e\,Q_e^2\,S}{j\,\omega\,m_e}\,(V/s) \qquad (৬.২০৫)$$

$$= j\,\omega\left(\frac{\varepsilon_0\,S}{s}\right)V + \frac{1}{j\,\omega\,(m_e/N_e\,Q_e^2)}\,\frac{S}{s}\,V$$

$$= \left(j\,\omega\,C + \frac{1}{j\omega L'}\,\frac{S}{s}\right)V \quad [\,(৬.২০২)\text{ অনুসারে }] \qquad (৬.২০৬)$$



চিত্র ৬.৬ : ক্যাপাসিটর C এবং ইন্ডাক্টর L সমান্তরাল সংযোগে সৃষ্ট একটি বর্তনীতে বৃত্তাকার কম্পন ω বিশিষ্ট একটি পরিবর্তনশীল ভোল্টেজ V–এর প্রয়োগ দেখানো হলো।

অনুনাদ কম্পনে আবেশী (inductive) ও ধারণী (capacitive) উভয় প্রকার প্রবাহের মান সীমিত থাকে কিন্তু তারা পরস্পরের সমান ও বিপরীত চিহ্নবোধক হওয়াতে মোট প্রবাহ শূন্য হয়ে যায়।

৬.১৫ প্লাজমা কৌণিক কম্পন ω_p (The Plasma Angular Frequency ω_p)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে আমরা আয়নিত গ্যাসে মোট প্রবাহ ঘনত্বের মান নিরূপণ করেছি (৬.২০৪) সমীকরণ)। একে নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়

$$\mathbf{J}_t = j\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}\left(1 - \frac{N_e\,Q_e^2}{\omega^2\,\varepsilon_0\,m_e}\right)$$

$$= j\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

যেখানে বন্ধনীর মধ্যে দ্বিতীয় পদ হলো পরিচলন ও সরণ প্রবাহ ঘনত্বের অনুপাত $\left[\left|\frac{\mathbf{J}}{\partial \mathbf{D}/\partial t}\right|\right.$

$$= \frac{j\,N_e\,Q_e^2\,\mathbf{E}}{j\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}\,\omega\,m_e} = \frac{N_e\,Q_e^2}{\omega^2\,\varepsilon_0\,m_e} = \left.\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]$$ এবং

$$\omega_p = \left(\frac{N_e\,Q_e^2}{\varepsilon_0\,m_e}\right)^{1/2} \qquad (৬.২০৭)$$

একে প্লাজমা কৌণিক কম্পন বলে। এ রাশিটি একমাত্র বিবেচ্য গ্যাসের গুণাগুণের উপর নির্ভর করে। এর প্রতিসঙ্গিক কম্পন

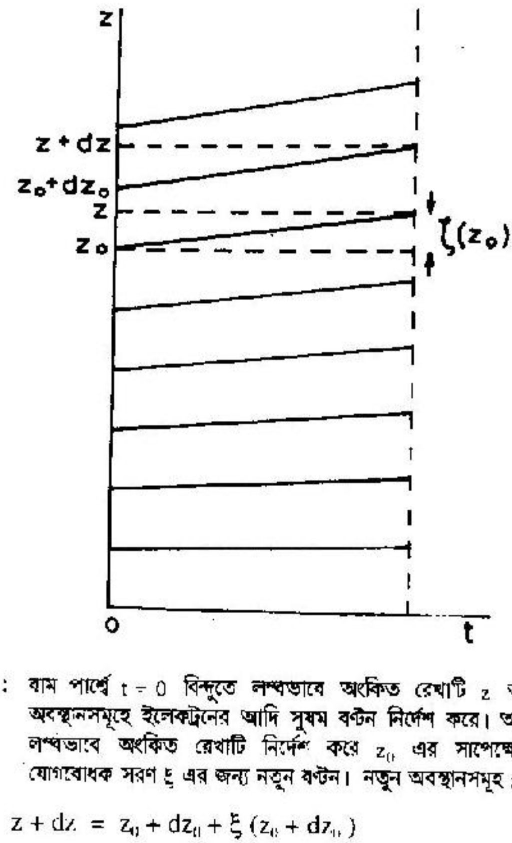
$$f_p = 8.98\,N_e^{1/2} \text{ হার্টজ} \qquad (৬.২০৮)$$

গ্যাস ক্ষরণ (discharge) এর মাধ্যমে সৃষ্ট প্লাজমাতে $N_e = 10^{18}$ ইলেকট্রন/ঘনমিটার এবং $\mathbf{f_p} = 10^4$ mc/S, অথচ আয়নোস্ফেয়ারে $N_e = 10^{11}$ ইলেকট্রন/ঘনমিটার এবং $f_p = 3$ mc/S ।

প্লাজমা কম্পন হলো আয়নিত গ্যাসের একটি বৈশিষ্ট্য। এটি সম্পর্কে আরো বিশদভাবে আলোচনা করা দরকার। এজন্য আমরা নিম্নোক্ত মডেল (model) ব্যবহার করব। একটি নিরপেক্ষ আয়নিত গ্যাসের কথা বিবেচনা করা যাক।

ইলেকট্রনের তুলনায় আয়ন অনেক বেশি ভারি। কাজেই আয়নগুলিকে স্থির কল্পনা করে আমরা তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের অবর্তমানে ইলেকট্রনগুলির গুচ্ছ গতি (group motion) অনুসন্ধান করব এবং আমরা তাপ আন্দোলন (thermal agitation) কে উপেক্ষা করব। এ সমস্ত শর্তাধীনে বিবেচ্য আয়তনের সর্বত্র চার্জ ঘনত্ব সুষম (uniform), অথচ ইলেকট্রন ঘনত্ব এক বিন্দু হতে অন্য বিন্দুতে পরিবর্তিত হতে পারে। কল্পনা করা যাক যে, ইলেকট্রনগুলি z অক্ষের দিকে চলে এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব হলো $\xi(z_0)$ [চিত্র ৬.৭]। $\xi(z_0)$ স্থানাংক z এর মূল মান z_0 এর একটি ফাংশন মাত্র। এ শর্তাধীনে যখন একটি ইলেকট্রন আদি অবস্থান z_0 হতে z অবস্থানে চলে যায় তখন আদি অবস্থান $z_0 + dz_0$ থেকে একটি ইলেকট্রন $z + dz$ অবস্থানে সরে যায়, যেখানে

$$z = z_0 + \xi(z_0) \qquad (৬.২০৯)$$



চিত্র ৬.৭ : বাম পার্শ্বে $t = 0$ বিন্দুতে লম্বভাবে অংকিত রেখাটি z অক্ষ বরাবর চিহ্নিত অবস্থানসমূহে ইলেকট্রনের আদি সুষম বন্টন নির্দেশ করে। অপরদিকে ডান পার্শ্বের লম্বভাবে অংকিত রেখাটি নির্দেশ করে z_0 এর সাপেক্ষে ক্রমান্বয়ে বর্ধনশীল যোগবোধক সরণ ξ এর জন্য নতুন বন্টন। নতুন অবস্থানসমূহ z দ্বারা চিহ্নিত।

এবং
$$z + dz = z_0 + dz_0 + \xi\,(z_0 + dz_0)$$

$$= z_0 + dz_0 + \xi\,(z_0) + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)_{z_0} dz_0 \qquad (৬.২১০)$$

সমীকরণ (৬.২১০) থেকে (৬.২০৯) বিয়োগ করে

$$dz = dz_0 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)_{z_0} dz_0 \qquad (৬.২১১)$$

এ প্রক্রিয়ায়, আদিতে যে পরিমাণ চার্জ Sdz_0 ক্ষুদ্র আয়তন (S ক্ষেত্রফল এবং dz_0 পুরুত্ব) দখল করে থাকে সেই একই পরিমাণ চার্জ পরিশেষে Sdz আয়তন দখল করে, যেখানে (৬.২১১) অনুসারে

$$Sdz = \left[dz_0 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)_{z_0} dz_0\right] S$$

$$= \left[1 + \left(\frac{d\xi}{d\,z}\right)_{z_0}\right] dz_0\, S \qquad (৬.২১২)$$

কাজেই z বিন্দুতে ইলেকট্রন ঘনত্ব N_e থেকে পরিবর্তিত হয়ে N_e' হয়, যেখানে

$$N_e' = \frac{N_e}{\left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)_z\right]} \qquad (৬.২১৩)$$

কল্পনা করা যাক, সরণ ξ প্রত্যেক স্থানে অকিঞ্চিৎকর এবং এটি z এর সাথে সহজভাবে (smoothly) পরিবর্তিত হয়, তাহলে

$$\left(\frac{d\xi}{d\,z}\right)_{z_0} = \frac{d\xi}{d\,z} << 1 \qquad (৬.২১৪)$$

এবং

$$N_e' = N_e\left(1 + \frac{d\xi}{d\,z}\right)^{-1}$$

$$= N_e\left(1 - \frac{d\xi}{d\,z}\right) \qquad (৬.২১৫)$$

তাহলে মোট চার্জ ঘনত্ব হলো আয়ন চার্জ ঘনত্ব বিয়োগ ইলেকট্রন চার্জ ঘনত্ব, অর্থাৎ

$$\rho = \sum_i N_i Q_i - N_e Q_e \left(1 - \frac{d\xi}{d\,z}\right)$$

$$= N_e Q_e \frac{d\xi}{d\,z} \qquad (৬.২১৬)$$

যেখানে ইলেকট্রনিক চার্জের মান Q_e হলো ধনাত্মক এবং N_i হলো একটি নির্দিষ্ট ধরনের আয়ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) এর সংখ্যা। যদি $\frac{d\xi}{d\,z}$ ধনাত্মক হয় তবে মোট চার্জ ঘনত্বও ধনাত্মক হবে।

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ (৬.৫১) অনুসারে এই চার্জ ঘনত্বের কারণে z অক্ষের দিকে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতার উদ্ভব হয় এবং লেখা যায়

$$\varepsilon_0 \frac{dE_z}{d\,z} = \rho = N_e Q_e \frac{d\xi}{d\,z}$$

বা

$$\frac{dE_z}{d\,z} = \frac{N_e Q_e}{\varepsilon_0} \frac{d\xi}{d\,z} \qquad (৬.২১৭)$$

সংকলন করে এবং সুষম (uniform) ক্ষেত্রকে উপেক্ষা করে আমরা পাই

$$E_z = \frac{N_e Q_e}{\varepsilon_0}\xi \qquad (৬.২১৮)$$

এরূপে E_z, ξ এর সাথে সমানুপাতিক এবং m_e ভরের একটি ইলেকট্রনের জন্য গতির সমীকরণ :

$$m_e \frac{d^2z}{dt^2} = -Q_e E_z = -\frac{N_e Q_e^2}{\varepsilon_0}\xi \qquad (৬.২১৯)$$

এখন $z = z_0 + \xi$, যেখানে z_0 আদি অবস্থান যা সময়ের সাপেক্ষে একটি ধ্রুবক ; সুতরাং

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = m_e \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{N_e Q_e^2}{\varepsilon_0} \xi \qquad (৬.২২০)$$

এ সমীকরণটি হলো অদমিত সরল ছন্দিত গতির (Undamped simple harmonic motion) সমীকরণ যার কৌণিক কম্পন ω_p :

$$\omega_p = \left(\frac{N_e Q_e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (৬.২২১)$$

ω_p এর এ মান (৬.২০৭) সমীকরণেও বের করা হয়েছে। অতএব প্রত্যেক ইলেকট্রনের আদি অবস্থানকে কেন্দ্র করে সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পাদন করতে পারে। এ কারণেই উপরে বর্ণিত অনুনাদ (resonance) এর ঘটনা ঘটে থাকে। এরূপে আমরা দুটি উপায়ে প্লাজমা কৌণিক কম্পন ω_p নির্ণয় করলাম [(৬.২০৭) এবং (৬.২২১)]।

আবার আমরা নিম্নোক্ত উপায়েও ω_p নির্ণয় করতে পারি। যদি আমরা কল্পনা করি।

ইলেকট্রন ঘনত্ব কোনো কৌণিক কম্পন ω_p এ স্পন্দনশীল, তবে প্রতিষঙ্গিক বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র ভেক্টর $\mathbf{E}$, একই কম্পনে স্পন্দনশীল হবে। তাহলে আমরা আয়নিত গ্যাসের জন্য পরিবাহকত্ব σ এর সমীকরণ (৬.১৯৯) ব্যবহার করতে পারি। এখন ৬.৫ অনুচ্ছেদে ৫নং সমস্যায় দেখানো হয়েছে :

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$
$$= \rho_0 e^{-(\sigma/k_e \varepsilon_0)t} \qquad (৬.২২২)$$

(৬.১৯৮) থেকে σ এর মান (৬.২২২) এ বসালে (যদি $k_e = 1$ হয়)

$$\rho = \rho_0 \exp\left[j\left(\frac{N_e Q_e^2}{\omega_p m_e \varepsilon_0}\right)\right] t$$

$$= \rho_0 \left[\cos\left(\frac{N_e Q_e^2}{\omega_p m_e \varepsilon_0}\right) t + j \sin\left(\frac{N_e Q_e^2}{\omega_p m_e \varepsilon_0}\right) t\right] \qquad (৬.২২৩)$$

উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে, ρ হলো স্পন্দনশীল যার কৌণিক কম্পন ω_p :

$$\omega_p = \frac{N_e Q_e^2}{\omega_p m_e \varepsilon_0}$$

বা
$$\omega_p^2 = \frac{N_e Q_e^2}{m_e \varepsilon_0}$$

$\therefore$
$$\omega_p = \left(\frac{N_e Q_e^2}{m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2} \qquad (৬.২২৪)$$

৬.১৬ উচ্চ কম্পনে তরঙ্গ সঞ্চারণ যেখানে $\omega > \omega_p$ (Wave Propagation atHhigh Frequencies Where $\omega > \omega_p$)

এক্ষেত্রে আমরা পরিবাহকত্ব σ বিশিষ্ট একটি মাধ্যমের তরঙ্গ সংখ্যা k এর জন্য প্রদত্ত (৬.১০১) সমীকরণ ব্যবহার করব। উক্ত সমীকরণে $k_e = k_m = 1$ এবং (৬.১৯৯) থেকে σ এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$k = \pm \frac{(k_e\, k_m)^{1/2}}{\lambda_0} \left(1 - j\, \frac{\sigma}{\omega\, k_e\, \varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (৬.২২৮)$$

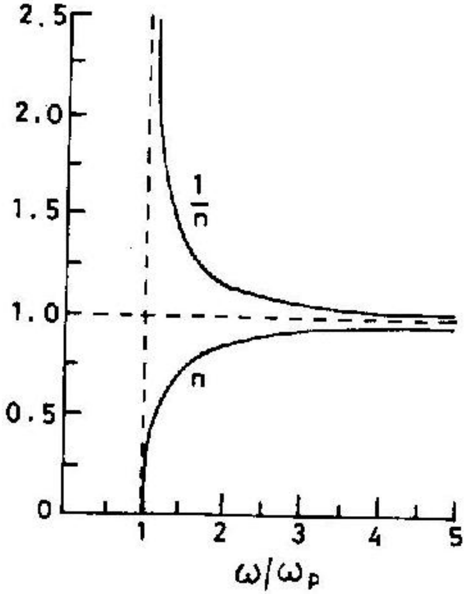
(৬.২২৪) থেকে ω_p এর মান (৬.২২৮) এ ব্যবহার করে এবং $Q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ কুলম্ব বসিয়ে আমরা পাই,

$$n = \left[1 - 80.5\,\frac{N_e}{f^2}\right]^{1/2} \qquad (৬.২২৯)$$

পরিশেষে দশা বেগ u :

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{[1 - (\omega_p/\omega)^2]^{1/2}} \quad [\text{(৬.২২৮) অনুযায়ী}] \qquad (৬.২৩০)$$

অতএব উচ্চ কম্পনে যেখানে $\omega > \omega_p$, দশা বেগ u আলোর বেগের তুলনায় বড়, তরঙ্গ সংখ্যা k এর মান বাস্তব এবং তরঙ্গের মান হ্রাস পায় না।
[(৬.৮) চিত্রে n এবং $\frac{1}{n}$ উভয়কে ω/ω_p এর ফাংশন হিসেবে চিত্রায়িত করা হয়েছে।] যেহেতু আয়ন ঘনত্ব বৃদ্ধি পেলে দশা বেগ বৃদ্ধি পায় [সমীকরণ (৬.২৩০)], উচ্চতর আয়ন ঘনত্বের অঞ্চলে তরঙ্গসমূহ বেঁকে যায়।



চিত্র ৬.৮ : একটি আয়নিত মাধ্যমের জন্য প্রতিসরাংক n এবং এর ব্যস্ত $\frac{1}{n}$ উভয়কে ω/ω_p-এর ফাংশন হিসেবে চিত্রায়িত করা হয়েছে।

উচ্চতর কম্পনে ($\omega >> \omega_p$) তরঙ্গের সঞ্চারণ আয়নিত গ্যাসের উপস্থিতিতে বিঘ্নিত হয় না। উল্লেখ্য যে, দশা বেগ হলো একটি নির্দিষ্ট দশার সঞ্চারণের বেগ। এটি একটি সংকেত

(signal) স্থানান্তরিত হওয়ার বেগ নয়, কারণ একটি সংকেত সাধারণত একাধিক কম্পনের সমন্বয়ে গঠিত। একক কম্পনবিশিষ্ট তরঙ্গ বিশুদ্ধ সাইন তরঙ্গ (যা $t = +\infty$ থেকে $t = -\infty$ পর্যন্ত বিস্তৃত) এর অনুরূপ। স্বাভাবিকভাবে এ ধরনের তরঙ্গ বার্তা প্রেরণের কাজে ব্যবহৃত হয় না। যেহেতু আয়নিত গ্যাসে দশা বেগ কম্পনের উপর নির্ভরশীল, একটি সংকেতের বিভিন্ন কম্পন উপাংশে বিভিন্ন বেগে প্রবাহিত হয়। ফলস্বরূপ একটি সংকেতের উপাংশ তরঙ্গসমূহের বেগগুলি থেকে ভিন্নতর একটি বেগে (যা মুক্তস্থানে আলোর বেগের তুলনায় কম) প্রবাহিত হয়।

যেহেতু উপাংশ তরঙ্গসমূহ বিভিন্ন বেগে প্রবাহিত হয় সেহেতু আয়নিত গ্যাসে সংকেতের আকৃতি অর্থাৎ তরঙ্গসমূহের আচ্ছাদন সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।

৬.১৭ নিম্ন কম্পনে তরঙ্গ সঞ্চারণ যেখানে $\omega < \omega_p$ (Wave Propagation at Low Frequencies Where $\omega < \omega_p$.)

যখন $\omega < \omega_p$, (৬.২২৫) হতে দেখা যায় তরঙ্গ সংখ্যা k এর মান কাল্পনিক হয়ে যায় :

$$k = \frac{1}{\lambda_0}\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= j\frac{1}{\lambda_0}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \qquad (৬.২৩১)$$

এবং E/H এ মান দাঁড়ায়

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu_0}{k} \qquad [\because k_m = 1]$$

$$= -j\frac{\omega\,\mu_0\,\lambda_0}{\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}} \qquad [(৬.২৩১) \text{ অনুসারে}]$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2}\frac{1}{[(\omega_p/\omega)^2 - 1]^{1/2}}\,e^{-j\pi/2} \quad [\because -j = e^{-j\pi/2}] \qquad (৬.২৩২)$$

উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে, **E** এবং **H** ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে দশান্তর $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান।

আবার যখন $\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{E}{H} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2}\frac{1}{[2-1]^{1/2}}\,e^{-j\pi/2}$$

$$= 377\,e^{-j\pi/2}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{E}{H}\right| = 377 \text{ ওহম} \qquad (৬.২৩৩)$$

অতএব $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$, $\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ এবং $\omega > \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ কম্পনসমূহে $\left|\frac{E}{H}\right|$ এর মান যথাক্রমে

মুক্তস্থানে এর মানের সমান, কম এবং বেশি। z অক্ষের যোগবোধক দিকে সঞ্চারিত তরঙ্গের জন্য **E**, x অক্ষের সমান্তরাল হলে লেখা যায়,

$$\mathbf{E} = E_0 \exp j\,[\omega t - kz]\,\mathbf{i}$$
$$= E_0 \exp [\,j\,\omega t - k'z\,]\,\mathbf{i} \qquad (৬.২৩৪)$$

যেখানে $K' = JK$ এর মান বাস্তব।

(৬.২৩২) এবং (৬.২৩৪) থেকে

$$\mathbf{H} = \mathbf{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} E_0 \exp(j\,\omega t - k'z)\, e^{j\pi/2} \qquad (৬.২৩৫)$$

$$\therefore\quad \mathbf{H}^* = \mathbf{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} E_0 \exp(-j\,\omega t - k'z)\, e^{-j\,\pi/2} \qquad (৬.২৩৬)$$

(৬.২৩৪) ও (৬.২৩৬) থেকে

$$(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \mathbf{k}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} E_0^2\, e^{-2k'z}\, e^{-j\,\pi/2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}\mathbf{k}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} E_0^2\, e^{-2k'z}\left(\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2}R_e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \mathbf{k}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} e^{-2k'z}\,\mathbf{E}_0^2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (৬.২৩৭)$$

অর্থাৎ তড়িৎ চুম্বকীয় শক্তি স্থানান্তরিত (transmitted) হয় না।

আবার প্রতিসরাংক n :

$$n = k\,\lambda_0$$
$$= \frac{j\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\lambda_0}{\lambda_0} \qquad [\,(৬.২৩১)\ \text{অনুসারে}\,]$$

$$\therefore\quad n = j\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \qquad (৬.২৩৮)$$

পরিশেষে দশা বেগ u :

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{j\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}}$$
$$= -j\,\frac{c}{\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}} \qquad (৬.২৩৯)$$

অতএব প্রতিসরাংক n এবং দশা বেগ u উভয়ই কাল্পনিক রাশি আবার (৬.২৩৪) এবং (৬.২৩৫) থেকে E ও H ভেক্টরদ্বয়কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\mathbf{E} = \left(E_0\, e^{-k'z}\right) e^{j\omega t}\,\mathbf{i} \tag{৬.২৪০}$$

$$\mathbf{H} = \left(H_0\, e^{-k'z}\right) e^{j(\omega t - \pi/2)}\,\mathbf{j} \tag{৬.২৪১}$$

উপরের সমীকরণ দুটি থেকে এটি স্পষ্ট যে, **E** এবং **H** ভেক্টরদ্বয় তরঙ্গরূপে সঞ্চারিত হয় না ; কারণ এদের দশা z এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং এদের বিস্তার z এর সাথে সূচকভাবে (exponentially) হ্রাস পায়।

অতএব আয়নিত গ্যাসে ω/ω_p অনুপাতটির মানের উপর নির্ভর করে একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ বিনা হ্রাসে স্থানান্তরিত হয় ($\omega > \omega_p$ এর জন্য) অথবা আদৌ স্থানান্তরিত হয় না ($\omega < \omega_p$ এর জন্য)।

সমাধানকৃত সমস্যাবলী

(Solved Problems)

সমস্যাবলী (Problems)

১। রৈখিক সমসত্ত্ব মাধ্যমের জন্য নিচের সমীকরণগুলিকে স্কেলার এবং ভেক্টর বিভব সহযোগে প্রকাশ কর :

$$\text{(i)}\ \nabla.\mathbf{D} = \rho, \quad \text{(ii)}\ \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\ \text{এবং}\ \text{(iii)}\ \nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

সমাধান

(১) আমরা জানি যে, স্কেলার ও ভেক্টর বিভব সহযোগে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতাকে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{১}$$

এখন $\nabla.\mathbf{D} = \rho,$ বা $\varepsilon\,\nabla.\mathbf{E} = \rho \quad (\because \mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E})$ (২)

(১) ও (২) থেকে

$$\varepsilon\,\nabla.\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

বা $$-\nabla.\nabla V - \nabla.\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

বা $$-\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{A}) + \frac{\rho}{\varepsilon}$$

উভয় পার্শ্বে $\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ যোগ করে আমরা পাই

$$-\nabla^2 V + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{A}) + \frac{\rho}{\varepsilon}$$

বা $$\nabla^2 V - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla.\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

বা $$\nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 - \frac{\rho}{\varepsilon}$$ [লরেন্‌ৎসের শর্তানুসারে]

∴ $$\nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (৩)$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের প্রথম সমীকরণ যা স্কেলার ও ভেক্টর বিভব সহযোগে প্রকাশিত। একে V এর অসমসত্ত্ব তরঙ্গ সমীকরণও বলা হয়। যে সকল বিন্দুতে $\rho = 0$ সেখানে সাধারণত তরঙ্গ সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$\nabla^2 V = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (৪)$$

এখানে তরঙ্গের দশা বেগ $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

স্থির বিদ্যুৎ ক্ষেত্রের জন্য স্কেলার বিভব সময়ের উপর নির্ভরশীল নয় এবং সেক্ষেত্রে $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ যাকে V এর জন্য পয়সনের সমীকরণ বলা হয়।

(ii) রৈখিক ও অদিকবর্তী মাধ্যমের জন্য আমরা জানি

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \text{আবার } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

∴ $$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A}) \qquad (৫)$$

এখন $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৬)$$

(৫) ও (১) সমীকরণদ্বয় (৬) এ প্রয়োগ করে পাওয়া যায়,

$$\nabla\left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}\right) = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\left[-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$$

বা $$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$$

বা $$\nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \mu\varepsilon\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

বা $$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\nabla\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla(\nabla.\mathbf{A})$$

বা $$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla.\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu\mathbf{J} + 0$$ [লরেন্‌ৎসের শর্তানুসারে]

∴ $$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\mathbf{J} \qquad (৭)$$

সমীকরণ (৭) ই হলো ভেক্টর বিভব সহযোগে ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ। একে ভেক্টর বিভব A এর জন্য অসমসত্ত্ব সমীকরণও বলা হয়। মুক্তস্থানে যেখানে প্রবাহ ঘনত্ব J এর মান শূন্য সেখানে

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \qquad (৮)$$

একে ভেক্টর বিভব **A** এর স্বাভাবিক তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয় যেখানে তরঙ্গের দশা বেগ $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ আবার যখন প্রবাহ ঘনত্ব **J** এর মান ধ্রুবক হয় তখন **A** এর মানও ধ্রুবক,

সুতরাং $$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{J} \qquad (৯)$$

একে ভেক্টর বিভব **A** এর জন্য পয়সনের সমীকরণ বলা হয়।

(III) $$\nabla.\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

বা $$\nabla.\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (১০)$$

এখন ৭নং সমীকরণের উভয় পাশে অপসারিতা নিলে :

$$\nabla.\left[\nabla^2\mathbf{A} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right] = -\mu\,\nabla.\mathbf{J}$$

$$\therefore \quad \nabla.\mathbf{J} = \frac{1}{\mu}\nabla.\left[\nabla^2\mathbf{A} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right] \qquad (১১)$$

আবার ৩নং সমীকরণের উভয় পাশে $\frac{\partial}{\partial t}$ নিলে :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 V - \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right] \qquad (১২)$$

(১১) ও (১২) যোগ করে আমরা পাই,

$$\nabla.\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\nabla.\left[\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right] - \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 V - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]$$

(১০) নং প্রয়োগ করে

$$\nabla.\left[\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right] + \mu\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 V - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right] = 0 \qquad (১৩)$$

উপরিউক্ত সমীকরণটি হলো ভেক্টর ও স্কেলার বিভব সহযোগে নিরবচ্ছিন্নতার সমীকরণ। যেহেতু উক্ত সমীকরণের বামপাশের মান শূন্য ; সমীকরণটির পদসমূহে নিম্নলিখিতভাবে পুনরায় সজ্জিত করে তা প্রমাণ করা যায় :

$$\nabla^2(\nabla.\mathbf{A}) - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla.\mathbf{A}) + \mu\varepsilon\,\nabla^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - (\mu\varepsilon)^2\,\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla^2\left[\nabla.\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial t}\right] - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\nabla.\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial t}\right] = 0$$

যেহেতু বন্ধনীর মধ্যে পদসমূহের মান শূন্য অতএব (১৩) সমীকরণটি সঠিকভাবে নিরবচ্ছিন্নতার সমীকরণ নির্দেশ করে।

২। ভেক্টর বিভব $\mathbf{A}$ সহযোগে চুম্বকীয় আবেশ $\mathbf{B}$ কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

এ সূত্র থেকে সমসত্ত্ব, রৈখিক ও দিকবর্তী একটি মাধ্যমে ক্ষেত্র ভেক্টর সহযোগে ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$\therefore$ $$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{[উভয় পাশে কার্ল নিয়ে]}$$

বা $$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla (\nabla.\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \qquad (১)$$

এখন লরেন্‌ৎসের শর্ত

$$\nabla.\mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{থেকে আমরা পাই,}$$

$$\nabla.\mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (২)$$

এবং ১নং সমস্যার ৭নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় :

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \qquad (৩)$$

এখন ১নং সমীকরণে (২) ও (৩) ব্যবহার করে

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \left(-\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu \mathbf{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

বা $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

উপরের সমীকরণে ১নং সমস্যার ১নং সমীকরণ প্রয়োগ করে,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (৪)$$

এখন রৈখিক ও দিকবর্তী মাধ্যমের জন্য

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{এবং} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

সুতরাং ৪নং সমীকরণের রূপ দাঁড়ায়

$$\nabla \times \mu \mathbf{H} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E})$$

$\therefore$ $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (৫)$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ।

৩। মুক্তস্থানে সঞ্চারমান একটি সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ $\exp[-j(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)]$ হিসেবে পরিবর্তিত হয় যেখানে $\mathbf{k}$ একটি তরঙ্গ ভেক্টর। দেখাও যে,

(ক) (i) $\mathbf{k}.\mathbf{E} = 0$ (ii) $\mathbf{k}.\mathbf{B} = 0$

(iii) $\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega \mathbf{B} = 0$ (iv) $\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega \mathbf{D} = 0$ এবং

(v) $(\mathbf{k}^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0$

(খ) তরঙ্গ প্যারামিটার সহযোগে তরঙ্গের বেগ কত?

সমাধান

প্রশ্নানুসারে প্রদত্ত তরঙ্গের $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-j(\mathbf{k.r} - \omega t)] \quad (১)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[-j(\mathbf{k.r} - \omega t)] \quad (২)$$

অনুরূপভাবে $\mathbf{D}$ এবং $\mathbf{B}$ কে প্রকাশ করা যায়। আবার $\mathbf{E}$ ভেক্টরকে নিম্নভাবেও লেখা যায় :

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\, E_x + \mathbf{j}\, E_y + \mathbf{k}\, E_z$$

$$= \mathbf{i}\,(E_{0x} + \mathbf{j}\, E_{0y} + \mathbf{k}\, E_{0z}) \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (৩)$$

যেখানে E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} এবং k_x, k_y, k_z স্থানাংক (x, y, z) এর উপর নির্ভরশীল নয়।

$$\therefore \quad \left(\mathbf{i}\, \frac{\partial}{\partial x}\right). \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[E_{0x} \exp\{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\}]$$

$$= -j\, k_x E_{0x} [\exp\{-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\}]$$

$$= -j\, k_x \mathbf{E}_x \quad (৪)$$

একইভাবে

$$\left(\mathbf{j}\, \frac{\partial}{\partial y}\right). \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -j\, k_y E_y \quad (৫)$$

এবং

$$\left(\mathbf{k}\, \frac{\partial}{\partial z}\right). \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = -j\, k_z E_z \quad (৬)$$

এখানে উল্লেখ্য যে $\mathbf{j}$ হলো y এর দিকে একটি একক ভেক্টর এবং $j\ (= \sqrt{-1})$ একটি কাল্পনিক রাশি।

সমীকরণ (৪), (৫) ও (৬) যোগ করে আমরা পাই,

$$\left(\mathbf{i}\, \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\, \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\, \frac{\partial}{\partial z}\right). \mathbf{E} = -j(k_x E_x + k_y y + k_z z)$$

বা

$$\nabla.\mathbf{E} = -j\, \mathbf{k.E} \quad (৭)$$

৭নং সমীকরণ থেকে স্পষ্টত প্রতীয়মান হয় যে এক্ষেত্রে ∇ করকটিকে $-j\mathbf{k}$ দ্বারা রূপান্তরিত করা যায়।

আবার সময়ের সাপেক্ষে $\mathbf{H}$ ভেক্টরকে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{H}_0 \exp\{-j(\mathbf{k.r} - \omega t)\}]$$

$$= j\,\omega\,\mathbf{H}_0 \exp\{-j\,(\mathbf{k.r} - \omega t)\}$$

$$= j\,\omega\,\mathbf{H} \qquad (৮)$$

৮নং থেকে দেখা যায় যে $\frac{\partial}{\partial t}$ করকটিকে $j\omega$ দ্বারা রূপান্তরিত করা যায়। এখন ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ এবং মুক্তস্থানে $\mathbf{E}$ এর তরঙ্গ সমীকরণে ∇ এর পরিবর্তে $(-j\,\mathbf{k})$ এবং $\frac{\partial}{\partial t}$ এর পরিবর্তে $(j\,\omega)$ ব্যবহার করে আমরা পাই

(ক) (i) $\nabla.\mathbf{D} = 0$

বা $\quad -j\,\mathbf{k}.\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} = 0$

$\therefore \quad \mathbf{k.E} = 0$ (প্রমাণিত)

(ii) $\quad \nabla.\mathbf{B} = 0$

বা $\quad -j\,\mathbf{k.B} = 0$

$\therefore \quad \mathbf{k.B} = 0$ (প্রমাণিত)

(iii) $\quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

বা $\quad -j\,\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -j\,\omega\,\mathbf{B}$

বা $\quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\,\mathbf{B}$

$\therefore \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega\,\mathbf{B} = 0$ (প্রমাণিত)

(iv) $\quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

বা $\quad -j\,\mathbf{k} \times \mathbf{H} = j\,\omega\,\mathbf{D}$

বা $\quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = \omega\,\mathbf{D}$

$\therefore \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega\,\mathbf{D} = 0$ (প্রমাণিত)

(v) $\quad \nabla^2\mathbf{E} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

বা $\quad (-j\,\mathbf{k}).\,(-j\,\mathbf{k})\,\mathbf{E} = \mu_0\,\varepsilon_0\,(j\,\omega)^2\,\mathbf{E}$

বা $\quad -\mathbf{k}^2\,\mathbf{E} = -\mu_0\,\varepsilon_0\,\omega^2\,\mathbf{E}$

$\therefore \quad (\mathbf{k}^2 - \mu_0\,\varepsilon_0\,\omega^2)\,\mathbf{E} = 0$ (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি, তরঙ্গটি u বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। তাহলে $\mathbf{E}$ এর জন্য তরঙ্গ সমীকরণটি হবে

$$\nabla^2\,\mathbf{E} = \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

বা $\quad (-j\,\mathbf{k})^2\,\mathbf{E} = \frac{1}{u^2}\,(j\,\omega)^2\,\mathbf{E}$

বা $$-\mathbf{k}^2\,\mathbf{E} = -\frac{1}{u^2}\omega^2\,\mathbf{E}$$

বা $$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{u^2} = 0 \qquad [\because\ \mathbf{E} \neq 0]$$

বা $$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{u^2}$$

$$\therefore \qquad u = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \pm\frac{\omega}{k} \tag{৯}$$

৯নং সমীকরণটি হলো তরঙ্গ বেগ u এবং তরঙ্গ প্যারামিটার ω (তরঙ্গের কৌণিক কম্পন) ও $\mathbf{k}$ (তরঙ্গ ভেক্টর) এর মধ্যে সম্পর্কযুক্ত নির্ণেয় তরঙ্গ বেগের সমীকরণ।

৪। একটি অপরিবাহীর মধ্যে সমরূপ সমতলীয় তরঙ্গের সাধারণ অবস্থায়

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\,\mathbf{i} + E_{0y}\,\mathbf{j} + E_{0z}\,\mathbf{k}) \exp j\,(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

যেখানে $E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, k_x, k_y$ এবং k_z সহগগুলি জটিল হতে পারে, কিন্তু সেগুলি স্থানাংক x, y, z এবং t এর উপর নির্ভরশীল নয়।

অনুরূপভাবে একই মান k_x, k_y, k_z সহগযোগে ভেক্টর $\mathbf{H}$ কে প্রকাশ করা যায়।

(ক) দেখাও যে, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

যেখানে বিবেচিত কম্পন ও মাধ্যমের সাপেক্ষে k হলো তরঙ্গ সংখ্যা।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ এবং $\mathbf{K}$ পরস্পর পরস্পরের সাথে লম্ব।

সমাধান

(ক) $$\mathbf{E} = (E_{0x}\,\mathbf{i} + E_{0y}\,\mathbf{j} + E_{0z}\,\mathbf{k}) \exp j\,(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$
$$= \mathbf{E}_0 \exp j\,(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \tag{১}$$
$$= \mathbf{E}_0 \exp j\,(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r}) \tag{২}$$

এখানে $$\mathbf{E}_0 = E_{0x}\,\mathbf{i} + E_{0y}\,\mathbf{j} + E_{0z}\,\mathbf{k}$$

আবার $$\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j} + E_z\,\mathbf{k}$$

$E_x = E_{0x} \exp j\,(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})$ ইত্যাদি

সুতরাং $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{E}) = (-j k_x)^2\,\mathbf{E}_0 \exp j\,(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$
$$= -k_x^2\,\mathbf{E} \tag{৩}$$

অনুরূপভাবে $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathbf{E}) = -k_y^2\,\mathbf{E} \tag{৪}$$

এবং $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{E}) = -k_z^2\,\mathbf{E} \tag{৫}$$

(৩), (৪) ও (৫) যোগ করে আমরা পাই

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\,\mathbf{E}$$

বা $$\nabla^2 \mathbf{E} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\,\mathbf{E} \qquad (৬)$$

এখন সমস্যা (৩) এ বর্ণিত ∇ এবং $\frac{\partial}{\partial t}$ করকদ্বয়কে এক্ষেত্রেও যথাক্রমে $(-j\mathbf{k})$ এবং $(j\omega)$ দ্বারা স্থানান্তরিত করা যেতে পারে। এরূপে দেখানো যেতে পারে –

$$\mathbf{k}.\mathbf{E} = 0 \qquad (৭)$$

$$\mathbf{k}.\mathbf{B} = 0 \qquad (৮)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega\,\mathbf{B} = 0 \qquad (৯)$$

এবং $$\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega\,\mathbf{D} = 0 \qquad (১০)$$

যেহেতু $$\nabla \Rightarrow -j\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \nabla^2 = \nabla.\nabla = (-j\,\mathbf{k}).(-j\,\mathbf{k}) = -k^2 \qquad (১১)$$

এখন (৬) ও (১১) থেকে

$$k^2\,\mathbf{E} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\,\mathbf{E}$$

$$\therefore \quad (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = k^2 \qquad \text{(প্রমাণিত)} \qquad (১২)$$

(খ) সমীকরণ (৭) থেকে দেখা যায় যে $\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{E}$ পরস্পর লম্ব। একইভাবে (৮) থেকে আমরা বলতে পারি $\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{B}$ পরস্পর লম্ব

আবার (৯) নং সমীকরণে $\mathbf{E}$ এর ডট (.) নিলে,

$$\mathbf{E}.(\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega\,\mathbf{B}) = 0$$

বা $$\mathbf{E}.(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) - \omega\,\mathbf{E}.\mathbf{B} = 0$$

বা $$\mathbf{E}.\mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\,\mathbf{E}.(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \qquad (১৩)$$

কিন্তু $$\mathbf{E}.(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$= 0$ যেহেতু নির্ণায়কের দুটি সারি অনুরূপ।

সুতরাং $\mathbf{E}.\mathbf{B} = 0$, যার অর্থ $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{B}$ পরস্পর লম্ব। এরূপে দেখা যাচ্ছে যে তিনটি ভেক্টর $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ এবং $\mathbf{k}$ পরস্পর পরস্পরের সাথে লম্ব।

৫। একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\,E_0 \cos\omega\,(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z - t) + \mathbf{j}\,E_0 \sin\omega\,(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z - t)$$

দেওয়া আছে, যেখানে E_0 একটি ধ্রুবক। তরঙ্গটির অনুরূপ চৌম্বক ক্ষেত্র ভেক্টর $\mathbf{B}$ এবং পয়েন্টিং ভেক্টর বের কর।

সমাধান

আমরা জানি,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) & E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z}\{E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)\} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}\{E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)\} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$-\mathbf{i}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) - \mathbf{j}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

বা
$$\mathbf{i}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

সময়ের সাপেক্ষে সংকলন করে :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{i}\,\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0}{-\omega}\sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) - \frac{\mathbf{j}\,\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0}{\omega}\cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)$$

$$= -\mathbf{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) \qquad (১)$$

$$\therefore \quad \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{i}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu} E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \frac{\mathbf{j}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu} E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)$$

$$= -\mathbf{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) \qquad (২)$$

অতএব পয়েন্টিং ভেক্টর **S**,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$= [\mathbf{i}\, E_0 \cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}\, E_0 \sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)] \times$$

$$[-\mathbf{i}\, E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \mathbf{j}\, E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)]$$

$$= 0 + \mathbf{i}\times\mathbf{j}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2\cos^2\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) - \mathbf{j}\times\mathbf{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2\sin^2\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + 0$$

$$= \mathbf{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2\{\cos^2\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t) + \sin^2\omega(\sqrt{\varepsilon\mu}\, z - t)\}$$

$$= \mathbf{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2 \qquad (৩)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because\ \mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = 0 \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ \text{এবং } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{array}\right]$$

৬। (ক) দেখাও যে, সুপরিবাহকে প্রতিসরাংক n ত্বক দূরত্ব δ এবং Q উৎপাদক নিম্নোক্ত উপায়ে সম্পর্কযুক্ত :

$$\text{(i)}\ Q\delta^2 = \frac{2}{\mu}\frac{\varepsilon}{\sigma^2}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{Q}{\delta^2} = \frac{k_e k_m}{2\lambda_0^2}$$

$$\text{(iii)}\ Qn^2 = \frac{k_e k_m}{2}$$

(খ) আরো দেখাও যে, সুপরিবাহকের জন্য n এর ন্যূনতম মান 5.

সমাধান

(ক) আমরা জানি, সুপরিবাহকের জন্য

(i) $$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \leq \frac{1}{50} \qquad (১)$$

এবং $$\delta = \left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2} \qquad (২)$$

∴ $$\delta^2 = \frac{2}{\omega\mu\sigma} \qquad (৩)$$

সুতরাং $$Q\delta^2 = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\cdot\frac{2}{\omega\mu\sigma} = \frac{2\varepsilon}{\mu\sigma^2} \qquad \text{(প্রমাণিত)}$$

(ii) ১নং ও ৩নং সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{Q}{\delta^2} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\times\frac{\omega\mu\sigma}{2} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\omega^2 k_e k_m \mu_0 \varepsilon_0}{2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{k_e k_m}{2}$$

$$= \frac{4\pi f^2}{f^2\lambda_0^2}\cdot\frac{k_e k_m}{2}$$

$$= \frac{k_e k_m}{2\bar{\lambda}_0^2} \qquad \left[\therefore\ \bar{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi}\right] \qquad (৪)$$

(iii) আবার আমরা জানি

$$n = \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}} \quad \text{এবং} \quad \delta = \bar{\lambda}$$

সুতরাং ৪নং সমীকরণ থেকে

$$\frac{Q}{\delta^2} = \frac{k_e k_m}{2\bar{\lambda}_0^2}$$

বা $$Q = \frac{\delta^2}{\bar{\lambda}_0^2}\frac{k_e k_m}{2} = \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}_0^2}\frac{k_e k_m}{2} = \frac{k_e k_m}{2n^2}$$

∴ $$Qn^2 = \frac{k_e k_m}{2} \qquad (৫)$$

(খ) $k_e = k_m = 1$ ধরে এবং $Q \leq \frac{1}{50}$ হতে আমরা পাই

$$n^2 \geq \frac{50}{2}$$

$$\therefore \quad n \geq \sqrt{25}$$

অর্থাৎ $n \geq 5$ সুপরিবাহকের জন্য।

৭। 1 MHz কম্পনে তামাতে (copper) একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ আলোচনা কর।

আমরা জানি, তামার পরিবাহকতা, $\sigma = 5.80 \times 10^7$ (ওহম–মি:)$^{-১}$

1 MHz কম্পনে $\quad Q = \frac{2\pi \times 10^6 \times 8.85 \times 10^{-12}}{5.80 \times 10^7} = 10^{-12}$

সুপরিবাহকের জন্য Q এর মান যে $\frac{1}{50}$ অপেক্ষা ছোট হতে হবে উপরিউক্ত নির্ণেয় মান বস্তুতপক্ষে এরই যথার্থতা প্রমাণ করে।

ত্বক গভীরতা (যা রেডিয়ান দৈর্ঘ্যও বটে)

$$\delta = \lambda\!\!\!^{-} = \left(\frac{2}{2\pi \times 10^6 \times 5.8 \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}}\right)^{1/2}$$

$$= 6.6 \times 10^{-5} \text{ মিটার}$$

$$= 66 \text{ মাইক্রোন}$$

তরঙ্গদৈর্ঘ্য $2\pi\lambda\!\!\!^{-}$ তামাতে 1 MHz কম্পনে প্রায় 0.4 মিলিমিটার। প্রকৃতপক্ষে, তামা ও বায়ু মাধ্যমে তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অনুপাত :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 2\pi \left(\frac{2}{\omega\ \sigma\ \mu_0}\right)^{1/2} f\,(\epsilon_0\, \mu_0)^{1/2}$$

$$= 1.4 \times 10^{-9}\ f^{1/2}$$

তুলনামূলকভাবে দশা বেগ নিম্নমানের :

$$u = \omega\,\lambda\!\!\!^{-} = 2\pi \times 10^6 \times 6.6 \times 10^{-5}$$

$$= 4.1 \times 10^2 \text{ মিটার/সেকেন্ড}$$

এই বেগ তামাতে শব্দের বেগের চেয়ে প্রায় দশগুণ কম (তামাতে শব্দের বেগ $= 3.6 \times 10^3$ মিটার/সেকেন্ড)।

আবার $\quad \frac{E}{H} = \left(\frac{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}\right)^{1/2} = 3.7 \times 10^{-4}$ ওহম্।

অথচ মুক্তস্থানে

$$\frac{E}{H} = 120\,\pi \text{ বা } 377 \text{ ওহ্ম ।}$$

প্রশ্নমালা

১। মুক্তস্থানে একক ভেক্টর $\mathbf{n}_1$ এর দিকে সঞ্চারিত একটি সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের কৌণিক কম্পন ω। যদি তরঙ্গ সংখ্যা $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_1$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\mathbf{K}.\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{K}.\mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} - \omega\,\mu_0\,\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{K} \times \mathbf{H} + \omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} = 0$$

২। যে কোনো সমসত্ত্ব, দিক নিরপেক্ষ, রৈখিক এবং স্থির মাধ্যমে সমতল তরঙ্গের জন্য দেখাও যে, $\mathbf{S}_{av}$ হলো গড়শক্তি ঘনত্ব এবং দশা বেগের গুণফল।

৩। একটি মাধ্যমে যেখানে (ক) $Q = 1$ এবং (খ) $Q^2 >> 1$, সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ কিরূপ হবে?

৪। $\left(k_e - j\,\dfrac{\sigma}{\omega\,\mu_0}\right)$ রাশিটিকে একটি মাধ্যমের জটিল ডাইইলেকট্রিক সহগ বলা হয়। উক্ত রাশিটি ব্যবহারের যৌক্তিকতা বর্ণনা কর।

৫। ৬.৫ অনুচ্ছেদে ৫নং সমস্যায় দেখানো হয়েছে যে, যদি কাল (Period) –এর এক–চতুর্থাংশ সময়ের মধ্যে হয় তবে দেখাও যে, Q এর মান অবশ্যই $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বড় হবে না।

৬। দেখাও যে সুপরিবাহকে সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের জন্য $\mathbf{E}$ ও $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের নির্ণেয় মান দ্বারা ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ সিদ্ধ হয়।

৭। একটি সুপরিবাহকে z অক্ষের ধনাত্মক দিকে একটি সমতল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ সঞ্চারিত হয়। $z = 0$ এবং $z = \infty$ এর মধ্যে প্রতি বর্গমিটারে জৌল তাপীয় ক্রিয়ার দ্বারা হারানো মোট ক্ষমতা নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এটি $z = 0$ তে পয়েন্টিং ভেক্টর এর সমান।

৮। 20 KHz ও 20 MHz কম্পনে সঞ্চারিত একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের জন্য তামা এবং সমুদ্রের পানিতে $\mathbf{E/H}$ এর মান কত?

৯। 20 KHz ও 20 MHz কম্পনে সঞ্চারিত একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের জন্য সমুদ্রের পানিতে এবং তামাতে হ্রাস (attenuation) নির্ণেয় কর। নির্ণেয় ফলাফল ডেসিবেল/মিটারে প্রকাশ কর।

১০। যদি কোনো মাধ্যমে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{J}_f$ এর মধ্যে দশান্তর $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান হয় তবে দেখাও যে, উক্ত মাধ্যমে কোনো শক্তি হ্রাস ঘটে না।

সপ্তম অধ্যায়

প্রতিফলন ও প্রতিসরণ

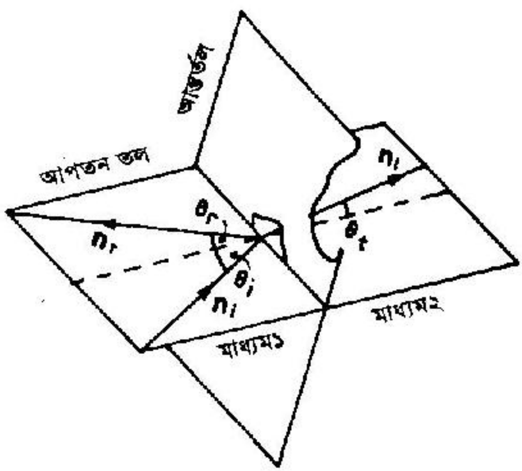
(Reflection and Refraction)

তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গের সঞ্চারণ ; প্রতিফলন ও প্রতিসরণ (Propagation of Electromagnetic Waves ; Reflection and Refraction)

৭.০ ভূমিকা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা অসীম এবং অবিচ্ছিন্ন (continuous) মাধ্যমে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের সঞ্চারণ সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এ অধ্যায়ে সঞ্চারণের মাধ্যমে, (৭.১) চিত্রের অনুরূপ, বিচ্ছিন্নতার প্রতিক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়ের মতো এখানেও তিন ধরনের মাধ্যম (ডাই-ইলেকট্রিক, সুপরিবাহক এবং নিম্নচাপ আয়নিত গ্যাস) বিবেচনা করা হবে। চৌম্বক (magnetic) বা অচৌম্বক (nonmagnetic) অপরিবাহককে ডাই-ইলেকট্রিক বলা হয়। আমাদের আলোচনা অচৌম্বক ডাই-ইলেকট্রিকের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখবো।



চিত্র ৭.১ : মাধ্যম ১-এ সঞ্চারিত একটি তড়িৎ চুম্বক মাধ্যম ১ এবং ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তলে আপতিত হয়ে প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত উভয় প্রকার তরঙ্গের উদ্ভব ঘটায়। n_i, n_r এবং n_t ভেক্টরগুলি হলো যথাক্রমে আপতিত, প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত তরঙ্গের দিকে একক ভেক্টর। θ_i, θ_r এবং θ_t হলো যথাক্রমে আপতন, প্রতিফলন ও প্রতিসরণ কোণ।

দুটি রৈখিক, সমসত্ত্ব এবং দিক–নিরপেক্ষ মাধ্যমের মধ্যে আমরা একটি পাতলা, অসীম এবং সমতল আন্তর্তল (Interface) কল্পনা করবো। তাহলে $\mathbf{n}_i$ বরাবর একটি আপতিত তরঙ্গের জন্য : $\mathbf{n}_r$ বরাবর একটি প্রতিফলিত এবং $\mathbf{n}_t$ বরাবর একটি প্রতিসরিত এই উভয় প্রকার তরঙ্গের উদ্ভব ঘটে। অবশ্য তিনটি তরঙ্গই আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ এর স্পর্শী উপাংশ–সমূহের অবিচ্ছিন্নতার শর্তাবলী সিদ্ধ করে।

৭.১ সীমান্ত শর্তাবলী (Boundary Conditions)

একটি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের অস্তিত্ব বিদ্যমান বলতে বুঝায়, এটি অবশ্যই :

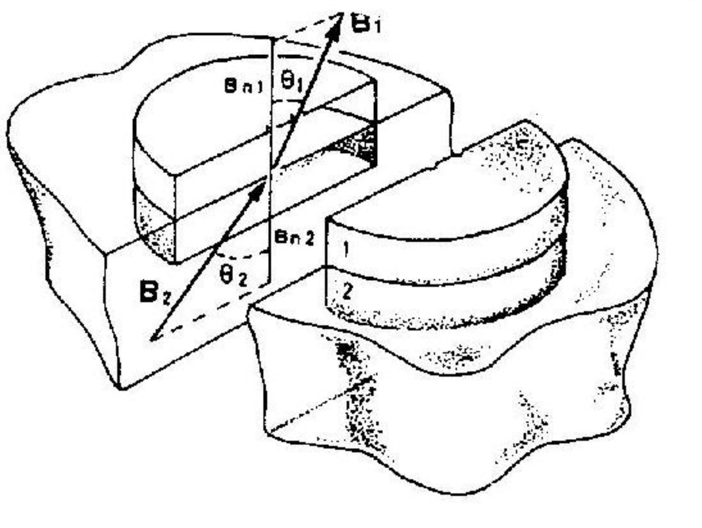
(১) ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহের একটি সমাধান হবে এবং

(২) বিবেচ্য ভৌত ব্যবস্থার জন্য কিছু সীমান্ত শর্তাবলী সিদ্ধ করবে। এখানে সেই সীমান্ত শর্তাবলী সম্পর্কে কিছু আলোচনা করা হবে।

৭.১.১ চৌম্বক ক্ষেত্রের জন্য সীমান্ত শর্তাবলী (Boundary conditions for magnetic fields)

(৭.১) চিত্রের একটি আন্তর্তল দেখানো হয়েছে যা, σ_1 ও μ_1 প্যারামিটারদ্বয় বিশিষ্ট মাধ্যম ১ এবং σ_2 ও μ_2 প্যারামিটারদ্বয় বিশিষ্ট মাধ্যম ২ কে পৃথক করেছে। আন্তর্তলে আড়া আড়িভাবে, চিত্র প্রদর্শিত উপায়ে, একটি ছোট বৃত্তাকার বেলন স্থাপন করে $\mathbf{B}$ এর ব্যবহার নির্ধারণ করা যেতে পারে। যেহেতু চৌম্বক বলরেখাসমূহ অবিচ্ছিন্ন ; অতএব

$$\int \mathbf{B}.ds = \int_{\text{প্রান্ত–1}} \mathbf{B}_1 . ds_1 + \int_{\text{বেলন}} \mathbf{B}.ds + \int_{\text{প্রান্ত–2}} \mathbf{B}_2 . ds_2$$



চিত্র ৭.২ : দুটি ভিন্ন মাধ্যম ১ ও ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তলে গাউসীয় তল এবং এদের দুটিতে চুম্বকীয় আবেশ $\mathbf{B}_1$ ও $\mathbf{B}_2$ এবং এদের উল্লম্ব উপাংশদ্বয় দেখানো হলো।

যদি দুটি তল (S_1 ও S_2), মাঝখানে আন্তর্তল রেখে, একে অপরের দিকে অগ্রসর হতে থাকে এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল শূন্যের দিকে অগ্রসর হয় তাহলে পাওয়া যায় —

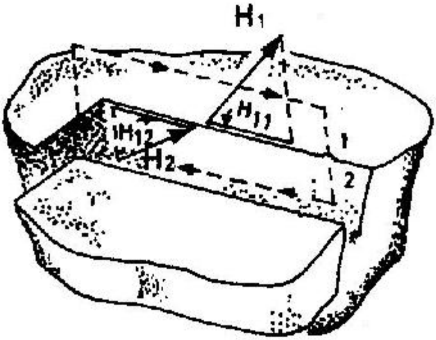
$$\int_{\text{প্রান্ত}-1} \mathbf{B}_1 . ds_1 + \int_{\text{প্রান্ত}-2} \mathbf{B}_2 . ds_2 = 0$$

বা
$$-Bn_1 \int_{\text{প্রান্ত}-1} ds_1 + Bn_2 \int_{\text{প্রান্ত}-2} ds_2 = 0$$

বা
$$-Bn_1 S_1 + Bn_2 S_2 = 0$$

$$\therefore \quad Bn_1 = Bn_2 \quad (\because S_1 = S_2) \qquad (৭.১)$$

অর্থাৎ, **B** এর উল্লম্ব উপাংশ একটি আন্তর্তলের একপাশ হতে অপরপাশ পর্যন্ত অবিচ্ছিন্ন।



চিত্র ৭.৩ : দুটি ভিন্ন মাধ্যম ১ ও ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তল ভেদকারী **H** ভেক্টরে আবদ্ধ সংকলন পথ।

(৭.২) চিত্রের ন্যায়, একটি আবদ্ধ আয়তাকার পথের চতুর্দিকে অ্যামপিয়ারের সূত্র প্রয়োগ করে একটি আন্তর্তলের একপাশ হতে অপরপাশ পর্যন্ত **H** এর পরিবর্তন পাওয়া যায়। চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা **H** কে, একটি কাল্পনিক একক মেরুর আবদ্ধ প্রযুক্ত বল হিসেবে ব্যাখ্যা করা যায় এবং এরূপে, $\oint \mathbf{H}.dl$ হলে একটি মেরুকে আবদ্ধ পথের চতুর্দিকে ঘুরিয়ে আনতে যে কাজ হয় তা। যদি এ ধরনের একটি মেরুকে মাধ্যম ১ এর পৃষ্ঠে আন্তর্তলের সাথে সমান্তরালভাবে Δz দূরত্ব হয় এবং মাধ্যম ২ এর পৃষ্ঠে বিপরীত দিকে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে প্রারম্ভিক বিন্দুতে ঘিরে আনা হয়। তাহলে সম্পাদিত কাজ হবে —

$$\oint \mathbf{H}.dl = (H_{t_1} - H_{t_2}) \Delta z \qquad (৭.২)$$

এখন, অ্যাম্পিয়ারের সূত্রানুসারে

$$\oint \mathbf{H}.dl = i$$

যেখানে i রেখা সংকেল (line integral) দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে সর্বমোট প্রবাহ। আন্তর্তলে কোনো প্রবাহ নেই কল্পনা করে, আমরা পাই

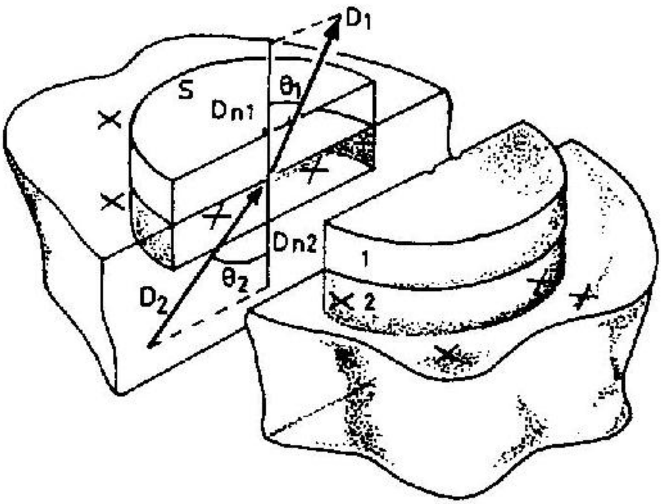
$$\oint \mathbf{H}.dl = 0 \qquad (৭.৩)$$

সুতরাং সমীকরণ (৭.২) ও (৭.৩) থেকে পাওয়া যায়,

$$\left(H_{t_1} - H_{t_2}\right) \Delta z = \oint \mathbf{H}.d\mathbf{l} = 0$$

$$\therefore \quad H_{t_1} = H_{t_2} \tag{৭.৪}$$

অর্থাৎ **H** এর স্পর্শী উপাংশ একটি প্রবাহ মুক্ত আন্তর্তলের একপাশ হতে অপরপাশ পর্যন্ত অবিচ্ছিন্ন।



চিত্র ৭.৪ : দুটি ভিন্ন মাধ্যম ১ ও ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তলে গাউসীয় তল এবং তাতে বৈদ্যুতিক সরণ ভেক্টর D_1, D_2 এবং তাদের উল্লম্ব উপাংশদ্বয় দেখানো হলো।

যদি উভয় মাধ্যম দিক-নিরপেক্ষ হয়, অর্থাৎ যদি **H** এবং **B** এর দিক একই হয়, তাহলে

$$\mathbf{B} = k_m \mu_0 \mathbf{H} \tag{৭.৫}$$

এখন চিত্র (৭.১) থেকে দেখা যায় যে,

$$Bn_1 = B_1 \cos\theta_1$$

$$= k_{m_1} \mu_0 H_1 \cos\theta_1 \tag{৭.৬}$$

এবং

$$B_{n2} = B_2 \cos\theta_2$$

$$= k_{m_2} \mu_0 H_2 \cos\theta_2 \tag{৭.৭}$$

সুতরাং, সমীকরণ (৭.৬) ও (৭.৭) অবলম্বনে সমীকরণ (৭.১) থেকে

$$k_{m1} H_1 \cos\theta_1 = k_{m_2} H_2 \cos\theta_2 \tag{৭.৮}$$

আবার চিত্র (৭.২) থেকে দেখা যায় যে,

$$H_{t_1} = H_1 \cos(90^\circ - \theta_1)$$

$$= H_1 \sin\theta_1 \tag{৭.৯}$$

এবং $$H_{t_2} = H_2 \cos(90^\circ - \theta_2)$$
$$= H_2 \sin\theta_2 \qquad (৭.১০)$$

অতএব, সমীকরণ (৭.৪)–এ সমীকরণ (৭.৯) ও (৭.১০) ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2 \qquad (৭.১১)$$

সুতরাং, সমীকরণ (৭.১১) কে সমীকরণ (৭.৮) দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{H_1 \sin\theta_1}{k_{m_1} H_1 \cos\theta_1} = \frac{H_2 \sin\theta_2}{k_{m_2} H_2 \cos\theta_2}$$

বা $$k_{m_2} \tan\theta_1 = k_{m_1} \tan\theta_2$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{k_{m_1}}{k_{m_2}} \qquad (৭.১২)$$

৭.১.২ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের জন্য সীমান্ত শর্তাবলী (Boundary conditions for electirc fields) : (৭.৩) চিত্রের ন্যায়, দুটি মাধ্যমের মধ্যবর্তী আন্তর্তলের প্রত্যেক পাশে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের তীব্রতার স্পর্শী উপাংশদ্বয় বিবেচনা করা যায়। কল্পনা করি যে, একক চার্জ, (৭.৩) চিত্রে প্রদর্শিত উপায়ে, মাধ্যম ১ এর পৃষ্ঠে আন্তর্তলের সাথে সমান্তরালভাবে Δz দূরত্ব বহন করা হয় এবং তারপর মাধ্যম ২ এর পৃষ্ঠে বিপরীতদিকে সমান দূরত্ব বহন করে প্রারম্ভিক বিন্দুতে ফিরে আনা হয়। তাহলে, চার্জটি আবদ্ধ পথের চতুর্দিকে ঘুরে বহন করতে সম্পাদিত কাজ হলো

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = \left(E_{t_2} - E_{t_1}\right) \Delta z \qquad (৭.১৩)$$

কিন্তু ফ্যারাডের সূত্রানুসারে,

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

যেহেতু পথ দুটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্বের ব্যবধানে অবস্থিত, চৌম্বক ফ্লাক্স সংযুক্তি (ϕ) এর মান শূন্য। অতএব,

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = 0 \qquad (৭.১৪)$$

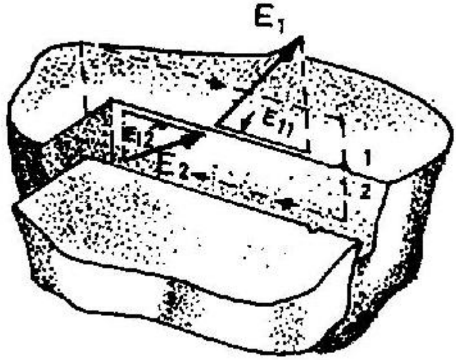
সুতরাং (৭.১৪) অবলম্বনে (৭.১৩) থেকে আমরা পাই

$$\left(E_{t_2} - E_{t_1}\right) \Delta z = \oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = 0$$

$$\therefore \quad E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (৭.১৫)$$

অর্থাৎ, বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের স্পর্শী উপাংশ, আন্তর্তলের একপাশ থেকে অন্য পাশ পর্যন্ত অবিচ্ছিন্ন।

পরিশেষে, গাউসের সূত্র প্রয়োগের মাধ্যমে, আন্তর্তলে সরণ ভেক্টরের উল্লম্ব উপাংশসমূহের মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ করা যেতে পারে। (৭.৩) চিত্রের তলদেশে প্রদর্শিত হয়েছে এমন একটি



চিত্র ৭.৫ : দুটি ভিন্ন মাধ্যম ১ ও ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তল ভেদকারী $\mathbf{E}$ ভেক্টরের আবদ্ধ সংকলন পথ।

ক্ষুদ্র ক্ষেত্রায়তন (Δs) আবদ্ধকারী ছোট পৃষ্ঠ বিবেচনা করা যাক। যদি পৃষ্ঠ চার্জ ঘনত্ব q_s হয়, আবদ্ধ চার্জ হবে $q_s \Delta s$ ।

তাহলে গাউসের সূত্রানুসারে লেখা যায়

$$\oint \mathbf{D}.ds = (D_{n_2} - D_{n_1})\,\Delta s = q_s\,\Delta s$$

বা
$$(D_{n_2} - D_{n_{21}}) = q_s \qquad (৭.১৬)$$

সংশ্লিষ্ট প্রায় সকল বিষয়েই আমরা ধরে নিব যে, $q_s = 0$, সুতরাং

$$D_{n_2} - D_{n_2} = 0, \text{ বা } D_{n_2} = D_{n_1} \qquad (৭.১৭)$$

অর্থাৎ, সরণ ভেক্টরের উল্লম্ব উপাংশ, আন্তর্তলের একপাশ হতে অপরপাশ পর্যন্ত অবিচ্ছিন্ন।

যদি উভয় মাধ্যম দিক-নিরপেক্ষ হয়, অর্থাৎ, $\mathbf{D}$ এবং $\mathbf{E}$ এর দিক একই হয়। তাহলে

$$\mathbf{D} = k_e\,\varepsilon_0\,\mathbf{E} \qquad (৭.১৮)$$

এখন, যদি দুটি ডাই-ইলেকট্রিকের মধ্যবর্তী আন্তর্তলে $\mathbf{D}$ বা $\mathbf{E}$ এর বলরেখাসমূহ (৭.৪) চিত্রানুরূপ বেঁকে যায়, তাহলে

$$Dn_1 = D_1 \cos\theta_1$$
$$= ke_1\,\varepsilon_0 \cos\theta_1\,E_1 \qquad (৭.১৯)$$

এবং
$$Dn_2 = D_2 \cos\theta_2$$
$$= ke_2\,\varepsilon_0 \cos\theta_2\,E_2 \qquad (৭.২০)$$

অতএব সমীকরণ (৭.১৯) ও (৭.২০) অবলম্বনে সমীকরণ (৭.১৭) এর রূপ দাঁড়ায়

$$ke_1\,E_1 \cos\theta_1 = ke_2\,E_2 \cos\theta_2 \qquad (৭.২১)$$

পুনরায়, চিত্র (৭.৪) থেকে

$$E_{t_1} = E \cos(90^\circ - \theta_1)$$
$$= E_1 \sin\theta_1 \qquad (৭.২২)$$

এবং $$E_{t_2} = E_2 \cos(90^\circ - \theta_2)$$
$$= E_2 \sin\theta_2 \qquad (৭.২৩)$$

সুতরাং সমীকরণ (৭.২২) ও (৭.২৩) থেকে যথাক্রমে E_{t_1} এবং E_{t_2} এর মান সমীকরণ (৭.১৫) এ বসালে আমরা পাই

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2 \qquad (৭.২৪)$$

সুতরাং, সমীকরণ (৭.২৪) কে সমীকরণ (৭.২১) দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{E_1 \sin\theta_1}{ke_1 E_1 \cos\theta_1} = \frac{E_2 \sin\theta_2}{ke_2 E_2 \cos\theta_2}$$

বা $$ke_2 \tan\theta_1 = ke_1 \tan\theta_2$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{ke_1}{ke_2} \qquad (৭.২৫)$$

৭.২ প্রতিফলনের নিয়মাবলী এবং স্নেলের প্রতিসরণের সূত্র (The Laws of Reflection and Snells Law of Refraction)

মনে করি, (৭.১) নং চিত্রানুরূপ আন্তর্তলে আপতিত তড়িৎ-চুম্বকীয় তরঙ্গ হলো সমতল ও সমতল পোলারায়িত, তাহলে এর বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতা $\mathbf{E}_i$ হবে নিম্নরূপ :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \exp[j(\omega_i t - k_1 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})] \qquad (৭.২৬)$$

যেখানে ইচ্ছানুযায়ী সময় $t = 0$ এবং মূলবিন্দু $r = 0$ মনোনীত করা যেতে পারে এবং k_1 হলো প্রথম মাধ্যমের তরঙ্গ সংখ্যা। এই সমীকরণ t এবং r এর সকল মানের জন্যই একটি সমতল তরঙ্গকে যথার্থরূপে বর্ণনা করে। যদি আপতিত তরঙ্গ তলীয় (planar) অর্থাৎ সমতল এবং সমতল পোলারায়িত হয় তবে একটি সমতল আন্তর্তল হতে প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত উভয় প্রকার তরঙ্গই তলীয় (planar) হবে। যেহেতু একটি নির্দিষ্ট আপতিত রশ্মির জন্য আন্তর্তলের সকল বিন্দুতে প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ সূত্রসমূহ একইরূপে হবে, কাজেই প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গদ্বয়কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \exp[j(\omega_r t - k_1 \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} + A)] \qquad (৭.২৭)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp[j(\omega_t t - k_2 \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} - B)] \qquad (৭.২৮)$$

যেখানে k_2 দ্বিতীয় মাধ্যমের তরঙ্গ সংখ্যা এবং A ও B ধ্রুবকদ্বয়, আপতিত তরঙ্গের সাথে যথাক্রমে প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গের দশান্তর। এখন আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ ও $\mathbf{H}$ উভয় ভেক্টরের স্পর্শী উপাংশগুলির অবিচ্ছিন্নতা (পূর্বের অনুচ্ছেদে আলোচিত) হতে প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গদ্বয়ের বৈশিষ্ট্যাবলী নির্ণয় করা যেতে পারে। আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ ভেক্টরের অবিচ্ছিন্নতা বলতে বুঝায়, এর প্রথম মাধ্যমে সংশ্লিষ্ট পৃষ্ঠে $\mathbf{E}_i$ এবং $\mathbf{E}_r$ এর স্পর্শী উপাংশদ্বয়ের সমষ্টিগত মান এবং দ্বিতীয় মাধ্যমের সংশ্লিষ্ট পৃষ্ঠে $\mathbf{E}_t$ এর স্পর্শী উপাংশের মান অবশ্যই সমান হবে। চৌম্বক ক্ষেত্র প্রাবল্য $\mathbf{H}$ এর গতিক (situation) একই ধরনের। আন্তর্তলে $\mathbf{D}$ এবং $\mathbf{B}$ এর উল্লম্ব উপাংশগুলির অবিচ্ছিন্নতা হতেও প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যাবলী প্রতিপাদন করা যেতে পারে।

আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ এর স্পর্শী উপাংশগুলির অবিচ্ছিন্নতা পেতে হলে সকল সময় এবং সকল ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ (চিত্র ৭.৬) এর জন্য $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r$ এবং $\mathbf{E}_t$ এর মধ্যে কিছু আবশ্যকীয় সম্বন্ধ বিবেচনা করা দরকার। এ ধরনের সম্বন্ধ সম্ভবত : (১) যদি $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r$ এবং $\mathbf{E}_t$ এই তিনটি ভেক্টরই সময় t ও স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ এর সাপেক্ষে একই ধরনের ফাংশন হয় এবং (২) যদি $\mathbf{E}_{0i}, \mathbf{E}_{0r}$ ও $\mathbf{E}_{0t}$ এর মধ্যে কিছু নির্দিষ্ট সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে।

(১) নং শর্তাধীনে সকল সময় t এবং সকল $\mathbf{r}_1$ এর জন্য আমরা পাই

$$\omega_i t - k_1 \mathbf{n}_i.\mathbf{r}_1 = \omega_r t - k_1 \mathbf{n}_r.\mathbf{r}_1 + A$$

$$= \omega_t t - k_2 \mathbf{n}_t.\mathbf{r}_1 + B \qquad (৭.২৯)$$

এখন t এর সহগগুলি সমীকৃত করে

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \qquad (৭.৩০)$$

অতএব তিনটি তরঙ্গ (যথা : আপতিত, প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত) একই কম্পাঙ্কবিশিষ্ট হবে।

এটি যেন, আরোপিত স্পন্দন এবং প্রযুক্ত বল একই কম্পাঙ্কবিশিষ্ট হয়, বলবিদ্যার এই নীতির অনুরূপ।

আবার সমীকরণ (৭.২৯) হতে আন্তর্তলে যে কোনো বিন্দু $\mathbf{r}_1$ এর জন্য আমরা পাই

$$k_1 \mathbf{n}_i.\mathbf{r}_1 = k_1 \mathbf{n}_r.\mathbf{r}_1 - A \qquad (৭.৩১)$$

$$= k_2 \mathbf{n}_t.\mathbf{r}_1 - B \qquad (৭.৩২)$$

সুতরাং (৭.৩১) থেকে

$$k_1 (\mathbf{n}_i.\mathbf{r}_1 - \mathbf{n}_r.\mathbf{r}_1) = -A$$

বা

$$(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r).\mathbf{r}_1 = -A/k_1 \qquad (৭.৩৩)$$

যেখানে A/k_1 হলো $\mathbf{r}_1$ এর সকল মানের জন্যই একটি ধ্রুবক।

অর্থাৎ $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r)$ এর উপর যে কোনো ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ (যা আন্তর্তলে সমাপ্ত) এর অভিক্ষেপ (projection) একটি ধ্রুবক। একটি নির্দিষ্ট আপতিত তরঙ্গের জন্য $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r)$ ভেক্টরটিও একটি ধ্রুবক। সুতরাং $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r)$ ভেক্টর আন্তর্তলের সাথে অবশ্যই অভিলম্বিক হবে। (চিত্র ৭.৬)। আন্তর্তলের সংজ্ঞা হলো

$$\mathbf{n}.\mathbf{r}_1 = \text{ধ্রুবক} \qquad (৭.৩৪)$$

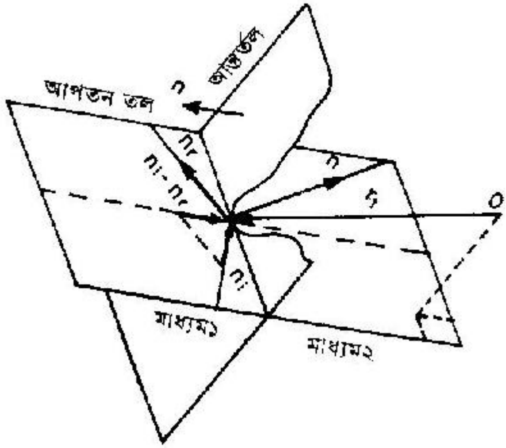
যেখানে $\mathbf{n}$ আন্তর্তলের সাথে অভিলম্বিক একক ভেক্টর।

যেহেতু $(\mathbf{n} - \mathbf{n}_r)$ ভেক্টর আন্তর্তলে লম্ব, $\mathbf{n}$ এবং $\mathbf{n}_r$ ভেক্টরদ্বয়ের স্পর্শী উপাংশ অবশ্যই পরস্পরের সমান হবে। অর্থাৎ

$$\cos(90^\circ - \theta_i) = \cos(90^\circ - \theta_r)$$

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r$$

$$\theta_i = \theta_r \qquad (৭.৩৫)$$



চিত্র ৭.৬ : আন্তর্তলে যে কোনো বিন্দুতে $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r)$ এর উপর $\mathbf{r}_1$ এর অভিক্ষেপ একটি ধ্রুবক। $\mathbf{n}$ ভেক্টরটি আন্তর্তলে উল্লম্ব।

বা প্রতিফলন কোণ আপতন কোণের সমান। যেহেতু $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_r)$ এবং $\mathbf{n}$ পরস্পরের সমান্তরাল (কারণ উভয়ই আন্তর্তলের উপর অভিলম্বিক) আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_r$ এবং $\mathbf{n}$ ভেক্টরগুলি একই তলে অবস্থান করে। এ সমস্ত হলো প্রতিফলনের নিয়মাবলী।

উপরের তিনটি ভেক্টরের তলকে আপতন তল বলা হয়, এটি আন্তর্তলের উপর উল্লম্ব। এখন (৭.৩২) সমীকরণ বিবেচনা করে আমরা পাই

$$(k_1 \mathbf{n}_i - k_2 \mathbf{n}_t) \cdot \mathbf{r}_1 = -B \qquad (৭.৩৬)$$

সুতরাং $(k_1\mathbf{n}_i - k_2\mathbf{n}_t)$ ভেক্টরটি আন্তর্তলের উপর উল্লম্ব। $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_t$ ও $\mathbf{n}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় (coplanar) $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_r$, $\mathbf{n}_t$ এবং $-\mathbf{n}$ এই চারটি ভেক্টরই আপতন তলের উপর অবস্থিত। আরও, $k_1\mathbf{n}_i$ ও $k_2\mathbf{n}_t$ ভেক্টরদ্বয়ের স্পর্শী উপাংশগুলি পরস্পরের সমান, কাজেই

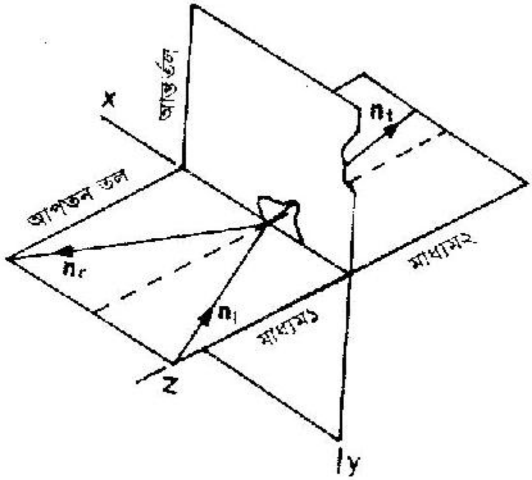
$$k_1 \cos(90° - \theta_i) = k_2 \cos(90° - \theta_t)$$

$$k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t \qquad (৭.৩৭)$$

অতএব আন্তর্তল অতিক্রমণের সময় $k \sin\theta$ রাশিটি অপরিবর্তনীয় থাকে। পুনরায় (৭.৩৭) হতে লেখা যায়

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k_1}{k_2} \qquad (৭.৩৮)$$

$$= \frac{n_1}{\lambda} \times \frac{\lambda}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (৭.৩৯)$$



চিত্র ৭.৭ : প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ ঘটনাবলীর আলোচনার জন্য ব্যবহৃত অক্ষীয় ব্যবস্থা।

যেখানে তরঙ্গ সংখ্যা $k = n/\lambda_0$ এবং n হলো প্রতিসরাংক। এটিই স্নেলের সূত্র। উল্লেখ্য, এই সূত্র এবং প্রতিফলনের সূত্রাবলী সম্পূর্ণভাবে সাধারণ যে কোনো দুটি মাধ্যমের জন্য (এমনকি পূর্ণ প্রতিফলনের ক্ষেত্রেও) এরা প্রযোজ্য।

মূল বিন্দুর অবস্থান আন্তর্তলে বিবেচনা করলে এবং (৭.৭) চিত্রে প্রদর্শিত উপায়ে অক্ষসমূহ চিহ্নিত করলে আমরা পাই $A = B = 0$ এবং $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$ এবং $\mathbf{E}_t$ এর জন্য প্রদত্ত রাশিমালা নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \exp [j \{\omega t - k_1 (\sin\theta_i x - \cos\theta_i z)\}] \quad (৭.৪০)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \exp [j \{\omega t - k_1 (\sin\theta_r x - \cos\theta_r z)\}] \quad (৭.৪১)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp [j \{\omega t - k_2 (\sin\theta_t x - \cos\theta_t z)\}] \quad (৭.৪২)$$

$$\Big[\text{যেহেতু } \mathbf{n}.\mathbf{r}_i = (\mathbf{i}\, n_{ix} - \mathbf{k}\, n_{iz}).(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$$

$$= n_{ix} x - n_{iz} z$$

এবং

$$n_{ix} = \left| \mathbf{n}_i \right| \cos (90° - \theta_i)$$

$$= 1 \sin\theta_i = \sin\theta_i$$

$$n_{iz} = \left| \mathbf{n}_i \right| \cos\theta_i = \cos\theta_i$$

$$\therefore \quad \big[\mathbf{n}.\mathbf{r}_i = \sin\theta_i x - \cos\theta_i z \big] \Big]$$

[চিত্র (৭.৭) মাধ্যম ১ এ সঞ্চারিত একটি তড়িত চৌম্বক তরঙ্গ মাধ্যম ১ এবং ২ এর মধ্যবর্তী আন্তর্তলে আপতিত হয়ে প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত উভয় প্রকার তরঙ্গের উদ্ভব ঘটায়। $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_r$ এবং $\mathbf{n}_t$ ভেক্টরগুলি হলো যথাক্রমে আপতিত, প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত তরঙ্গের দিকে একক ভেক্টর। θ_i, θ_r এবং θ_t হলো যথাক্রমে আপতন, প্রতিফলন ও প্রতিসরণ কোণ।]

(৭.৬) চিত্রের আন্তর্তলে যে কোনো বিন্দুতে $(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_t)$ এর উপর $\mathbf{r}_1$ এর অভিক্ষেপ একটি ধ্রুবক $\mathbf{n}$ ভেক্টরটি আন্তর্তলে উল্লম্ব

(৭.৭) চিত্রের প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ ঘটনাবলীর আলোচনার জন্য ব্যবহৃত অক্ষীয় ব্যবস্থা।

৭.৩ ফ্রেনেলের সমীকরণসমূহ (Fresnel's Equations)

আমরা এখন পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে উল্লিখিত দ্বিতীয় শর্ত সম্পর্কে আলোচনা করব। অর্থাৎ আমরা $\mathbf{E}_{0i}$, $\mathbf{E}_{0r}$ এবং $\mathbf{E}_{0t}$ এই রাশি তিনটির পারস্পরিক সম্বন্ধাবলী (যারা আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ এর স্পর্শী উপাংশদ্বয়ের অবিচ্ছিন্নতা সুনিশ্চিত করে) নিরূপণ করব।

স্মরণ থাকে যে, একটি সমতল তড়িত চৌম্বক তরঙ্গে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে এবং তরঙ্গ সঞ্চারণের দিকের সাথে অভিলাম্বিক ((৬.২) অনুচ্ছেদে) কাজেই, আপতিত তরঙ্গের $\mathbf{E}$ ভেক্টরের দিকাবস্থ $\mathbf{n}_i$ ভেক্টরের সাথে উল্লম্ব যে কোনো দিকে হতে পারে। দুভাগে বিভক্ত করলে আলোচনা অনেক সহজ হবে। প্রথমে আমরা সে অবস্থার কথা বিবেচনা করব যেখানে আপতিত তরঙ্গ এমনভাবে পোলারায়িত যে, এর $\mathbf{E}$ ভেক্টর আপতন তলের উপর লম্ব এবং তারপর বিবেচনা করব যে, $\mathbf{E}$ ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরাল। যে কোনো আপতিত তরঙ্গকে এরূপ দুটি উপাংশে বিভক্ত করা যেতে পারে।

৭.৩.১ আপতিত তরঙ্গ এমনভাবে পোলারায়িত যে, এর E ভেক্টর আপতন তলের উপর অভিলাম্বিক (Incident wave polarized with its **E**-vector normal to the plane of incidence) : আপতিত তরঙ্গে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের দিগবস্থ (৭.৮) চিত্রের অনুরূপ। যদি মাধ্যমদ্বয় দিক–নিরপেক্ষ (অধ্যায়ের শুরুতেই যা কল্পনা করা হয়েছে) হয়, প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত উভয় তরঙ্গেই $\mathbf{E}$ ভেক্টর হবে আপতন তলের উপর অভিলাম্বিক

যদি আপতিত তরঙ্গের বৈদ্যুতিক এবং চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতার মান জানা থাকে তবে এক্ষেত্রে অজ্ঞাতরাশিগুলি হতে E_{0r}, H_{0r}, E_{0t} এবং H_{0t} এ চারটি অজ্ঞাতরাশি নির্ণয়ের জন্য আমরা চারটি সমীকরণও পেতে পারি : (১) আন্তর্তলে $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের স্পর্শী উপাংশ-গুলির অবিচ্ছিন্নতা হতে দুটি সমীকরণ এবং (২) প্রথম ও দ্বিতীয় মাধ্যমে সমতল তরঙ্গের জন্য $\mathbf{E}$ এবং $\mathbf{H}$ ভেক্টরদ্বয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধ হতে দুটি সমীকরণ (সমীকরণ ৬.৭৯)।

একটি নির্দিষ্ট সময়ে এবং আন্তর্তলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র তীব্রতার স্পর্শী উপাংশের অবিচ্ছিন্নতা হতে ,

$$\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t} \tag{৭.৪৩}$$

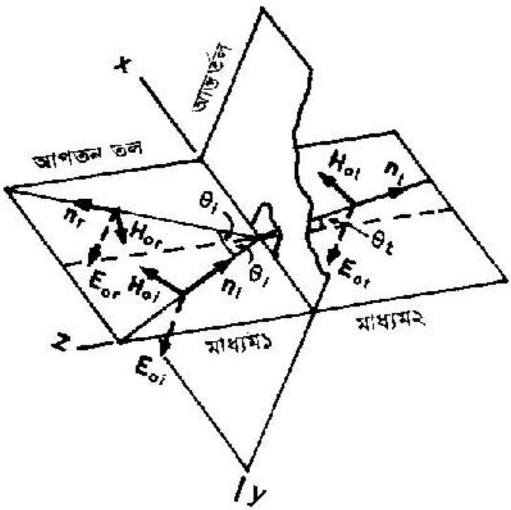
একইভাবে চৌম্বক ক্ষেত্র তীব্রতার অবিচ্ছিন্নতা হতে

$$\mathbf{H}_{0i} \cos\theta_i - \mathbf{H}_{0r} \cos\theta_i = \mathbf{H}_{0t} \cos\theta_t \tag{৭.৪৪}$$

(৬.৭৯) সমীকরণ অনুসারে,

$$\mathbf{H}_{0i} = \frac{k_1}{\omega \mu_1} E_{0i}$$

$$\mathbf{H}_{0r} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} \mathbf{E}_{0r} \text{ এবং } \mathbf{H}_{0t} = \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_{0t}$$



চিত্র ৭.৮ : আপতিত তরঙ্গ এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের উপর লম্ব। এক্ষেত্রে আপতিত, প্রতিফলিত ও প্রতিসরিত তরঙ্গ। E এবং H ভেক্টরের জন্য নির্দেশিত তীরচিহ্নসমূহ আন্তর্তলে এদের যোগবোধক দিক নির্দেশ করে।

অতএব সমীকরণ (৭.৪৪) এর রূপ দাঁড়ায়

$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}(\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or})\cos\theta_i = \frac{k_2}{\omega\mu_2}\mathbf{E}_{ot}\cos\theta_t \qquad (৭.৪৫)$$

* যেহেতু আপতন তল আন্তর্তলের উপর লম্ব এবং **E** ভেক্টরও আপতন তলের উপর লম্ব, কাজেই **E** ভেক্টরসমূহ আন্তর্তলের সমান্তরাল এবং এ তলে এদের স্পর্শী উপাংশগুলি যথাক্রমে $\mathbf{E}_{oi}\cos 0^\circ = \mathbf{E}_{oi}$, $\mathbf{E}_{or}\cos 0^\circ = \mathbf{E}_{or}$ এবং $\mathbf{E}_{ot}\cos 0^\circ = \mathbf{E}_{ot}$ । আন্তর্তল AB এর সমান্তরাল CD আঁকি চিত্র (৭.৯)। এখন AB || CD এবং ao এদের ছেদক, অতএব

$$\angle aoB = \angle Cao \text{ কিন্তু } \angle Boa + \theta_i = 90^\circ$$

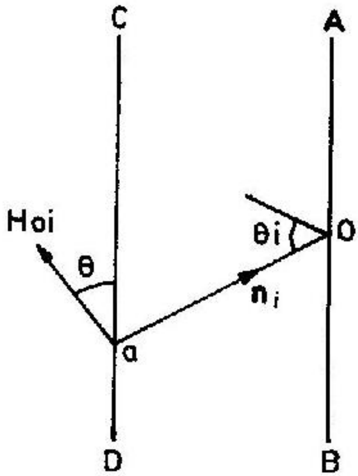
আবার $$\angle Cao + \theta = 90^\circ \text{ অতএব } \theta = \theta_i$$

এবং আন্তর্তলে $\mathbf{H}_{oi}$ এর স্পর্শী উপাংশ হলো $\mathbf{H}_{oi}\cos\theta_i$ । একইভাবে, আন্তর্তলে $\mathbf{H}_{or}$ এবং $\mathbf{H}_{ot}$ এর স্পর্শী উপাংশদ্বয় হলো $\mathbf{H}_{or}\cos\theta_r = \mathbf{H}_{or}\cos\theta_i$ এবং $\mathbf{H}_{ot}\cos\theta_t$ । $\mathbf{H}_{oi}\cos\theta_i$ এবং $\mathbf{H}_{or}\cos\theta_i$

বা $\mathbf{H}_{ot}\cos\theta_t$ পরস্পর বিপরীতমুখী।

বা $$\frac{n_1}{k_{m1}}(\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or})\cos\theta_i = \frac{n_2}{k_{m2}}\mathbf{E}_{ot}\cos\theta_t \qquad (৭.৪৬)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because k = n/\lambda_0 \\ \text{এবং } \mu = k_m \mu_0 \end{array}\right]$$



চিত্র ৭.৯ : এখানে আপতনতলে H_{oi}–এর উপাংশ নির্ণয় করে দেখানো হয়েছে।

(৭.৪৩) থেকে $E_{or} (= E_{ot} - E_{oi})$ এর মান (৭.৪৬) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\frac{n_1}{k_{m_1}}(E_{oi} - E_{ot} + E_{oi})\cos\theta_i = \frac{n_2}{k_{m_2}} E_{ot}\cos\theta_t$$

$$\frac{n_1}{k_{m_1}} 2\, E_{oi}\cos\theta_i = \left(\frac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i + \frac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t\right)E_{ot}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_N = \frac{2\,\dfrac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i + \dfrac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t} \qquad (৭.৪৭)$$

পুনরায় (৭.৪৩) থেকে $E_{ot} (= E_{oi} + E_{or})$ এর মান (৭.৪৬)–এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{n_1}{k_{m_1}}(E_{oi} - E_{or})\cos\theta_i = \frac{n_2}{k_{m_2}}(E_{oi} + E_{or})\cos\theta_t$$

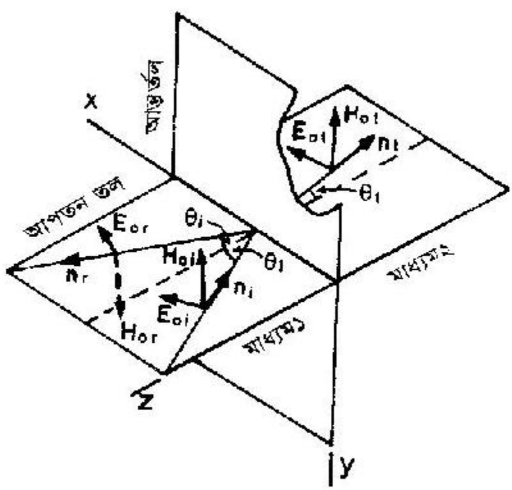
বা

$$\left(\frac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i - \frac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t\right)E_{oi} = \left(\frac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i + \frac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t\right)E_{or}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_N = \frac{n_1/k_{m_1}\cos\theta_i - \dfrac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}}\cos\theta_i + \dfrac{n_2}{k_{m_2}}\cos\theta_t} \qquad (৭.৪৮)$$

এখানে প্রত্যয় N নির্দেশ করে যে, E_{oi} আপতন তলের উপর লম্ব। (৭.৪৭) এবং (৭.৪৮) হলো ফ্রেনেলের চারটির মধ্যে দুটি সমীকরণ। পরবর্তী অনুচ্ছেদে অপর দুটি সমীকরণ প্রতিপাদন করা হবে। ফ্রেনেলের সমীকরণসমূহ হলো আপতিত, প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গের বিস্তারের অনুপাত। এরা সম্পূর্ণভাবে সাধারণ এবং যে কোনো দুটি মাধ্যমের জন্য প্রযোজ্য। এমনকি পূর্ণ প্রতিফলন বা সুপরিবাহকের পৃষ্ঠ হতে প্রতিফলনের ক্ষেত্রেও এরা প্রযোজ্য।

৭.৩.২ আপতিত তরঙ্গ এমনভাবে পোলারায়িত যে, এর E ভেক্টর সবসময় আপতন তলের সাথে সমান্তরাল (Incident wave polarized with its **E** Vector parallel to the plane of incidence) : এক্ষেত্রে তিন ধরনের তরঙ্গের জন্যই **E** ভেক্টর হবে আপতন তলের সাথে সমান্তরাল (চিত্র ৭.১০)। E_{or} এবং E_{oi} এর দিগবস্থা ব্যতিক্রম শুধু আন্তর্তলের উপর লম্বকে ঘিরে 90° ঘূর্ণন।



চিত্র ৭.১০ : আপতিত তরঙ্গ এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরাল। এরূপক্ষেত্রে আপতিত, প্রতিফলিত এবং প্রতিসরিত তরঙ্গ। E এবং H ভেক্টরের জন্য নির্দেশিত তীরচিহ্নসমূহ আন্তর্তলে এদের যোগবোধক দিক নির্দেশ করে।

এখন একটি নির্দিষ্ট সময়ে আপতন বিন্দুতে চৌম্বক ক্ষেত্রের স্পর্শী উপাংশের অবিচ্ছিন্নতা হতে [যেহেতু $\mathbf{H}_{oi}$ (বা $\mathbf{H}_{or}$) আপতন তলের উপর লম্ব এবং ঊর্ধ্বমুখী ; এরা পরস্পর বিপরীতমুখী এবং আন্তর্তলের সাথে সমান্তরাল]

$$H_{oi} \cos 0^\circ - H_{or} \cos 0^\circ = H_{ot} \cos 0^\circ$$

বা
$$H_{oi} - H_{or} = H_{ot} \qquad (৭.৪৯)$$

বা
$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}(E_{oi} - E_{or}) = \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_{ot} \quad [\text{সমীকরণ (৬.৭৯) অনুসারে}] \qquad (৭.৫০)$$

আবার আন্তর্তলের আপতন বিন্দুতে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের স্পর্শী উপাংশের অবিচ্ছিন্নতা হতে [যেহেতু $\mathbf{E}_{oi}$ এবং $\mathbf{E}_{or}$ উভয়ক্ষেত্রেই আন্তর্তল ও আপতন তলের ছেদন রেখার θ_i কোণে এবং $\mathbf{E}_{ot}$ ছেদনরেখার সাথে θ_t কোণে একইদিকে অবস্থিত] লেখা যায়,

$$(\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or}) \cos\theta_i = \mathbf{E}_{ot} \cos\theta_t \qquad (৭.৫১)$$

সমীকরণ (৭.৫০) থেকে $\mathbf{E}_{ot}$ এর মান সমীকরণ (৭.৫১)–এ বসালে আমরা পাই

$$(\mathbf{E}_{oi} + \mathbf{E}_{or}) \cos\theta_i = \frac{k_1}{k_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} (\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or}) \cos\theta_t$$

$$= \frac{n_1}{\lambda_o} \frac{\lambda_o}{n_2} \frac{k_{m_2}}{k_{m_1}} (\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or}) \cos_t \qquad \left[\begin{array}{c} \because k \frac{n}{\lambda_o} \\ \text{এবং} \\ \mu = k_m \mu_o \end{array} \right]$$

$$= \frac{n_1}{n_2} \frac{k_{m_2}}{k_{m_1}} (\mathbf{E}_{oi} - \mathbf{E}_{or}) \cos\theta_t$$

বা $$\mathbf{E}_{or} \cos\theta_i + \frac{n_1}{n_2} \frac{k_{m_2}}{k_{m_1}} \mathbf{E}_{or} \cos\theta_t = \frac{n_1}{n_2} \frac{k_{m_2}}{k_{m_1}} \mathbf{E}_{oi} \cos\theta_t - \mathbf{E}_{oi} \cos\theta_i$$

বা $$\mathbf{E}_{or} \left(\frac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i + \frac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t \right) = \mathbf{E}_{oi} \left(\frac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t - \frac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i \right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\mathbf{E}_{or}}{\mathbf{E}_{oi}} \right)_P = \frac{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t - \dfrac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t + \dfrac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i} \qquad (৭.৫২)$$

আবার সমীকরণ (৭.৫০) থেকে $\mathbf{E}_{or} \left(= \mathbf{E}_{oi} - \frac{k_2 \, \mu_1}{k_1 \, \mu_2} \mathbf{E}_{ot} \right)$ এর মান সমীকরণ (৭.৫১) এ বসালে এটি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\left(E_{oi} + E_{oi} - \frac{k_2}{k_1} \frac{\mu_1}{\mu_2} E_{ot} \right) \cos\theta_i = E_{ot} \cos\theta_t$$

বা $$2\, E_{oi} \cos\theta_i = E_{ot} \cos\theta_t + \frac{n_2}{n_1} \frac{k_{m_1}}{k_{m_2}} E_{ot} \cos\theta_i$$

বা $$\left(\frac{2\, n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_i \right) E_{oi} = \left(\frac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t + \frac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i \right) E_{ot}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_P = \frac{\dfrac{2\, n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_i}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} \cos\theta_t + \dfrac{n_2}{k_{m_2}} \cos\theta_i} \qquad (৭.৫৩)$$

সমীকরণ (৭.৪৭), (৭.৪৮), (৭.৫২) এবং (৭.৫৩) হলো ফ্রেনেলের চারটি সমীকরণ। লম্ব আপতন ($\theta_i = 0$) এ আপতন তল অনির্ণয়যোগ্য হয় এবং ফ্রেনেলের সমীকরণ (৭.৪৮) ও (৭.৫২) হতে পাওয়া যায়

$$\frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} - \dfrac{n_2}{k_{m_2}}}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} + \dfrac{n_2}{k_{m_2}}} \qquad (৭.৫৪)$$

এবং সমীকরণ (৭.৪৭) ও (৭.৫৩) হতে

$$\frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2\,\dfrac{n_1}{k_{m_1}}}{\dfrac{n_1}{k_{m_1}} + \dfrac{n_2}{k_{m_2}}} \qquad (৭.৫৫)$$

৭.৪ দুটি ডাই-ইলেকট্রিকের মধ্যবর্তী আন্তর্তলে প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ (Reflection & refraction at the interface between two dielectrics)

এখন ধরা যাক, দুটি মাধ্যমই ক্ষতিশূন্য ডাই-ইলেকট্রিক, তাহলে $k_{m_1} = k_{m_2} = 1$ এবং সমীকরণ (৭.৪৭) ও (৭.৪৮) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_N = \frac{2\,n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\,(n_1/n_2)\cos\theta_i}{\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t} \qquad (৭.৫৬) \qquad \left[\text{হর এবং লব উভয়কে } n_2 \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$$

$$= \frac{2\,(\sin\theta_t/\sin\theta_i)\cos\theta_i}{(\sin\theta_t/\sin\theta_i)\cos\theta_i + \cos\theta_t} \qquad \left[\text{স্নেলের সূত্রানুসারে } \sin\theta_t/\sin\theta_i = \frac{n_1}{n_2}\right]$$

$$= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin\theta_t\cos\theta_i + \cos\theta_t\sin\theta_i} \qquad (৭.৫৭)$$

$$= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \qquad (৭.৫৮)$$

আবার সমীকরণ (৭.৫৭) এর হর এবং লব উভয়কে $\cos\theta_t\cos\theta_i$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_N = \frac{2\,(\sin\theta_t\cos\theta_i/\cos\theta_t\cos\theta_i)}{\dfrac{\sin\theta_t\cos\theta_i}{\cos\theta_t\cos\theta_i} + \dfrac{\cos\theta_t\sin\theta_i}{\cos\theta_t\cos\theta_i}}$$

$$= \frac{2\tan\theta_t}{\tan\theta_t + \tan\theta_i} \qquad (৭.৫৯)$$

এবং
$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_N = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t} \qquad (৭.৬০)$$

$$= \frac{(\sin\theta_t/\sin\theta_i)\cos\theta_i - \cos\theta_t}{(\sin\theta_t/\sin\theta_i)\cos\theta_i + \cos\theta_t}$$ [সমীকরণ (৭.৩৯ অনুসারে]

$$= \frac{\sin\theta_t \cos\theta_i - \cos\theta_t \sin\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_i + \cos\theta_t \sin\theta_i} \qquad (৭.৬১)$$

$$= \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \qquad (৭.৬২)$$

আবার সমীকরণ (৭.৬১) এর হর এবং লব উভয়কে $\cos\theta_t \cos\theta_i$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_N = \frac{\tan\theta_t - \tan\theta_i}{\tan\theta_t + \tan\theta_i} \qquad (৭.৬৩)$$

সমীকরণ (৭.৫৮) বা (৭.৫৯) এবং সমীকরণ (৭.৬২) বা (৭.৬৩) প্রতিপাদন হয়েছে এমন একটি তরঙ্গের জন্য, যার $\mathbf{E}$ ভেক্টর আপতন তলের সাথে লম্বভাবে পোলারায়িত। সমীকরণ (৭.৫৯) থেকে দেখা যায় যে $(E_{0t}/E_{0i})_N$ সর্বদাই বাস্তব এবং যোগবোধক অর্থাৎ আন্তর্তলে প্রতিসরিত তরঙ্গ এবং আপতিত তরঙ্গ সর্বদাই সম দশায় থাকে।

অপরপক্ষে, n_1/n_2 এর মানের উপর নির্ভর করে $(E_{0r}/E_{0i})_N$ অনুপাতটি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ : যদি $n_1/n_2 > 1$ হয়

তবে স্নেলের সূত্র $\left(\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}\right)$ হতে

$$\sin\theta_t > \sin\theta_i$$

অর্থাৎ $\theta_t > \theta_i$

$\therefore$ $\cos\theta_t < \cos\theta_i$

সুতরাং সমীকরণ (৭.৬০) হতে দেখা যায় যে, এ অবস্থায় $(E_{0r}/E_{0i})_N$ এর মান ধনাত্মক, অর্থাৎ $n_1 > n_2$ হলে, আন্তর্তলে প্রতিফলিত তরঙ্গ এবং আপতিত তরঙ্গ সমদশায় থাকে।

অপরপক্ষে যদি $\frac{n_1}{n_2} < 1$ হয়

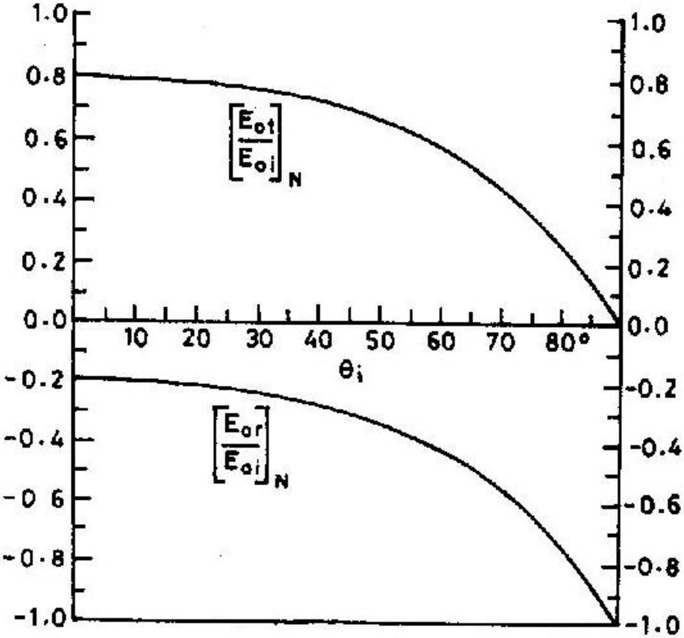
তবে স্নেলের সূত্রানুসারে,

$$\sin\theta_t < \sin\theta_i$$

অর্থাৎ $\theta_t < \theta_i$

$\therefore$ $\cos\theta_t > \cos\theta_i$

সুতরাং সমীকরণ (৭.৬০) থেকে প্রতীয়মান হয় যে, এই অবস্থায় $\left(E_{or}/E_{oi}\right)_N$ এর মান ঋণাত্মক, অর্থাৎ $n_1 < n_2$ হলে, আন্তর্তলে প্রতিফলিত এবং আপতিত তরঙ্গদ্বয় 180° ভিন্ন দশায় থাকে, চিত্র (৭.১১)–এ $n_1/n_2 = 1/1.5$ এর জন্য সমীকরণ (৭.৫৬) ও (৭.৬০) এর অনুপাতদ্বয়কে দেখানো হলো। এটি নির্দেশ করে, উদাহরণস্বরূপ, বায়ু মাধ্যম হতে একটি আলোক তরঙ্গ কাচে (প্রতিসরাংক ১.৫) এর উপর আপতিত হয়েছে।



চিত্র ৭.১১ : $n_1/n_2 = 1/1.5$ এর জন্য আপতন কোণ θ_i এর সাথে $(E_{or}/E_{oi})_N$ এবং $(E_{ot}/E_{oi})_N$ অনুপাতদ্বয়ের পরিবর্তন। তরঙ্গটি এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের উপর লম্ব।

লম্ব আপতনে $\theta_i = 0$ এবং

$$\frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\frac{n_1}{n_2} + 1} \qquad \text{[সমীকরণ (৭.৬০) অনুসারে]} \qquad (৭.৬৪)$$

$$\frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2\,(n_1/n_2)}{\frac{n_1}{n_2} + 1} \qquad \text{[সমীকরণ (৭.৫৬) অনুসারে]} \qquad (৭.৬৫)$$

E ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরালভাবে পোলারায়িত এরূপ একটি তরঙ্গের জন্য,

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\rho = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \qquad \text{[সমীকরণ (৭.৫২) অনুসারে]}$$

$$= \frac{(n_1/n_2) \cos\theta_t - \cos\theta_i}{(n_1/n_2) \cos\theta_t + \cos\theta_i} \qquad (৭.৬৬)$$

$$= \frac{(\sin\theta_t/\sin\theta_i) \cos\theta_t - \cos\theta_i}{(\sin\theta_t/\sin\theta_i) \cos\theta_t + \cos\theta_i} \qquad \text{[স্নেলের সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{\sin\theta_t \cos\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta_t - \frac{1}{2}\sin 2\theta_i}{\frac{1}{2}\sin 2\theta_t + \frac{1}{2}\sin 2\theta_i}$$

$$= -\frac{\sin 2\theta_i - \sin 2\theta_t}{\sin 2\theta_i + \sin 2\theta_t} \qquad (৭.৬৭)$$

আবার, $\sin C - \sin D = 2 \sin\left(\frac{C - D}{2}\right) \cos\left(\frac{C + D}{2}\right)$ এবং

$$\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

অভেদাবলী অবলম্বনে সমীকরণ (৭.৬৭) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\rho = -\frac{2 \sin(\theta_i - \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t)}{2 \cos(\theta_i - \theta_t) \sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \qquad (৭.৬৮)$$

এখন সমীকরণ (৭.৫৩) হতে

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\rho = \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2 (n_1/n_2) \cos\theta_i}{(n_1/n_2) \cos\theta_t + \cos\theta_i} \qquad (৭.৬৯)$$

$$= \frac{2 (\sin\theta_t/\sin\theta_i) \cos\theta_i}{(\sin\theta_t/\sin\theta_i) \cos\theta_t + \cos\theta_i}$$

$$= \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\frac{1}{2}\sin 2\theta_t + \frac{1}{2}\sin 2\theta_i}$$

$$= \frac{4\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin 2\theta_t + \sin 2\theta_i} \qquad (৭.৭০)$$

$$= \frac{4\sin\theta_t \cos\theta_i}{2\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}$$

$$= \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \qquad (৭.৭১)$$

সমীকরণ (৭.৭০) বা (৭.৭১) থেকে দেখা যায় যে, $\left(E_{ot}/E_{oi}\right)$ অনুপাতটি সর্বদাই ধনাত্মক। এটি নির্দেশ করে যে, E_{ot} এবং E_{oi} এর আপেক্ষিক দশা চিত্র (৭.১০) এর অনুরূপ। অর্থাৎ আন্তর্তলে আপতিত এবং প্রতিফলিত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র প্রখরতার স্পর্শী উপাংশদ্বয় সমদশায় থাকে। অপরপক্ষে, $\left(E_{or}/E_{oi}\right)$ অনুপাতটি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হতে পারে, যা নির্দেশ করে যে $\mathbf{E}_{or}$ এর দিক চিত্র (৭.১০) এর অনুরূপ অথবা এর বিপরীতমুখী। এরূপে E_{oi} এবং E_{or} এর স্পর্শী উপাংশদ্বয় সমদশায় অথবা π রেডিয়ান ভিন্ন দশায় থাকতে পারে। সমীকরণ (৭.৪২) হতে দেখা যায় যে, আন্তর্তলে $\mathbf{E}_{or}$ এবং $\mathbf{E}_{oi}$ এর উপাংশদ্বয় সমদশায় থাকবে, যদি

$$\sin 2\theta_t - \sin 2\theta_i > 0$$

বা

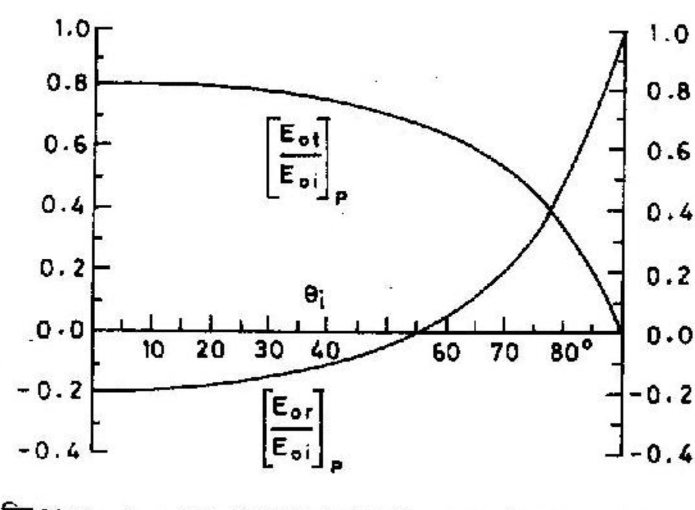
$$\sin(\theta_t - \theta_i)\cos(\theta_t + \theta_i) > 0 \qquad (৭.৭২)$$

এ অসমতা সিদ্ধ হবে যদি

$$\theta_t > \theta_i \quad \text{এবং} \quad \theta_t + \theta_i < \pi/2 \qquad (৭.৭৩)$$

অথবা যদি

$$\theta_t < \theta_i \quad \text{এবং} \quad \theta_t + \theta_i > \pi/2 \qquad (৭.৭৪)$$



চিত্র ৭.১২ : $n_1/n_2 = 1/1.5$ এর জন্য আপতন কোণ θ_i এর সাথে $(E_{or}/E_{oi})_p$ এবং $(E_{ot}/E_{oi})_p$ অনুপাতদ্বয়ের পরিবর্তন। তরঙ্গটি এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরাল।

সুতরাং এক্ষেত্রে প্রতিফলিত তরঙ্গের দশা শুধু n_1/n_2 অনুপাতটির উপর নির্ভর করে না ; এটি নির্ভর করে θ_i এবং θ_t উভয়ের উপর। E_{or}/E_{oi} অনুপাতটি, $n_1 > n_2$ এবং $n_1 < n_2$ উভয়ক্ষেত্রেই, ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হতে পারে। লম্ব আপতনে $(\theta_i = 0)$ এ সমীকরণ (৭.৬৬) ও (৭.৬৯) যথাক্রমে সমীকরণ (৭.৬৪) ও (৭.৬৫)–এ রূপান্তরিত হয়। চিত্র (৭.১২)–এ $\frac{n_1}{n_2} = 1/1.5$ এর জন্য সমীকরণ (৭.৬৬) ও (৭.৬৯) এর অনুপাতদ্বয়কে দেখানো হলো।

৭.৪.১ ব্রিউস্টার কোণ (The Brewster angle) : পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের সমীকরণ (৭.৬৮) থেকে প্রতীয়মান হয় যে, যার ভেক্টর আপন তলের সাথে সমান্তরালভাবে পোলারায়িত এমন একটি তরঙ্গের জন্য, নিম্নোক্ত শর্তাবলীর অধীনে কোনো প্রতিফলিত তরঙ্গ পাওয়া যাবে না (অর্থাৎ আন্তর্তলে আপতিত তরঙ্গ সম্পূর্ণভাবে দ্বিতীয় মাধ্যমে অপসারিত হবে) :

(১) যখন $\theta_i = \theta_t = 0$

(২) যখন $\theta_i - \theta_t = 0$

বা $\theta_i = \theta_t$

এবং (৩) যখন $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$

প্রথম শর্তটি অশুদ্ধ, যেহেতু এই শর্তাধীনে সমীকরণ (৭.৪৩) এর ভিন্নরূপ সমীকরণ (৭.৪১) থেকে দেখা যায় যে,

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\rho = \frac{n_1/n_2 \cos 0^\circ - \cos 0^\circ}{n_1/n_2 \cos 0^\circ + \cos 0^\circ}$$

$$= \frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\frac{n_1}{n_2} + 1} \neq 0 \qquad (৭.৭৫)$$

দ্বিতীয় শর্তটি বুঝায়, দুটি মাধ্যমের অভিন্ন বৈদ্যুতিক ধর্মাবলী রয়েছে, এবং স্পষ্টত এ শর্তাধীনে কোনো প্রতিফলন হবে না।

তৃতীয় বা শেষোক্ত শর্তাধীনে, যেহেতু $\tan 90^\circ = \infty$ সমীকরণ (৭.৬৮) এর অনুপাতটির মান শূন্য এবং এর ভিন্নরূপ সমীকরণ (৭.৬৬) থেকেও দেখা যায়

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\rho = \frac{\frac{n_1}{n_2}\cos(\pi/2 - \theta_t) - \cos(\pi/2 - \theta_i)}{\frac{n_1}{n_2}\cos(\pi/2 - \theta_t) + \cos(\pi/2 - \theta_i)} \qquad \left[\begin{array}{l} \because \theta_i + \theta_t = \pi/2 \\ \theta_i = \pi/2 - \theta_t \\ \text{এবং } \theta_t = \pi/2 - \theta_i \end{array}\right]$$

$$= \frac{n_1/n_2 \sin\theta_i - \sin\theta_t}{n_1/n_2 \sin\theta_i + \sin\theta_t} \qquad [\because \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta]$$

$$= \frac{n_1/n_2 - \sin\theta_t / \sin\theta_i}{n_1/n_2 + \sin\theta_t / \sin\theta_i}$$

$$= \frac{n_1/n_2 - n_1/n_2}{n_1/n_2 + n_1/n_2}$$

$$= 0 \qquad (৭.৭৬)$$

অর্থাৎ $\frac{E_{or}}{E_{oi}}$ অনুপাতটির মান শুন্য।

যে আপতন কোণের জন্য আপতন ও প্রতিসরণ কোণের যোগফল $\pi/2$, তাকে ব্রিউস্টার কোণ বা পোলারায়ন কোণ বলে। এ নির্দিষ্ট কোণের জন্য আমরা পাই $\theta_t = \pi/2 - \theta_i$; সুতরাং স্নেলের সূত্রের রূপ দাঁড়ায় :

$$\frac{\sin(\pi/2 - \theta_{iB})}{\sin\theta_{iB}} = \frac{n_1}{n_2}$$

বা
$$\frac{\cos\theta_{iB}}{\sin\theta_{iB}} = \frac{n_1}{n_2}$$

∴
$$\cot\theta_{iB} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (৭.৭৭)$$

এ কোণকে পোলারায়ন কোণও বলা হয়, কারণ নিম্নে বর্ণনা করা হলো। সাধারণত আলোক তরঙ্গ সর্বদিকে পোলারায়িত হয়। একে দুটি উপাংশে বিশ্লিষ্ট করা যায় : একটি উপাংশে **E** ভেক্টর আপতন তলের সাথে লম্বভাবে পোলারায়িত এবং অপর উপাংশে **E** ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরালভাবে পোলারায়িত। আন্তর্তলে যদি আপতন কোণ ব্রিউস্টার কোণের সমান হয়, আপতন তলের সাথে সমান্তরালভাবে পোলারায়িত তরঙ্গ প্রতিফলন ব্যতিরেকে প্রতিসরিত হবে। সুতরাং প্রতিফলিত তরঙ্গে শুধু আপতন তলের সাথে লম্বভাবে পোলারায়িত উপাংশ পাওয়া যাবে। এরূপে এই পদ্ধতি ব্যবহার করে পোলারায়িত আলোক তরঙ্গ পাওয়া যেতে পারে।

১.৬ প্রতিসরাংক বিশিষ্ট কাচে আপতিত আলোক তরঙ্গের জন্য ব্রিউস্টার কোণের মান 58° (প্রায়) এবং কাচ হতে বহির্গামী আলোক তরঙ্গের জন্য ব্রিউস্টার কোণের মান 32° (প্রায়)।

৭.৪.২ দুটি ডাই-ইলেকট্রিকের মধ্যবর্তী আন্তর্তলে প্রতিফলন এবং প্রতিসরণের গুণাঙ্কদ্বয়

(The Co-efficients of Reflection & Transmission at an interface between two dielectrics.)

প্রতিফলন এবং প্রতিসরণের সহগদ্বয়কে (যা আন্তর্তলের একপাশ হতে অপরপাশ পর্যন্ত শক্তির প্রবাহের সাথে সম্পর্কযুক্ত) নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়

$$R \text{ (প্রতিফলনের সহগ)} = \left| \frac{\mathbf{S}_{rav}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{S}_{iav}\cdot\mathbf{n}} \right| \qquad (৭.৭৮)$$

এবং $$T \text{ (প্রতিসরণের সহগ)} = \left| \frac{\mathbf{S}_{tav}.\mathbf{n}}{\mathbf{S}_{iav}.\mathbf{n}} \right| \qquad (৭.৭৯)$$

যেখানে, $\mathbf{n}$ = আন্তর্তলের উপর উল্লম্ব দিকে একক ভেক্টর।

$\mathbf{S}_{iav}$ = আপতিত তরঙ্গের জন্য পয়েন্টিং ভেক্টরের গড় মান।

সমীকরণ (৬.৯৬) অনুসারে

$$\mathbf{S}_{iav} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}\right)E_{oi}^2\mathbf{n}_i$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)E_{oi}^2\mathbf{n}_i \qquad [\, k_m = 1 \text{ ধরে}\,] \qquad (৭.৮০)$$

$\mathbf{S}_{rav}$ (প্রতিফলিত তরঙ্গের জন্য পয়েন্টিং ভেক্টরের গড়মান)

$$\mathbf{S}_{rav} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{or}^2\mathbf{n}_r \qquad (৭.৮১)$$

$\mathbf{S}_{tav}$ (প্রতিসরিত তরঙ্গের জন্য পয়েন্টিং ভেক্টরের গড়মান)

$$\mathbf{S}_{tav} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{ot}^2\mathbf{n}_t \qquad (৭.৮২)$$

উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে, $\mathbf{n}_i$ আপতিত তরঙ্গের দিকে একক ভেক্টর, $\mathbf{n}_r$ প্রতিফলিত তরঙ্গের দিকে একক ভেক্টর, $\mathbf{n}_t$ প্রতিসরিত তরঙ্গের দিকে একক ভেক্টর। সমীকরণ (৭.৮০) হতে $\mathbf{S}_{iav}$ এবং সমীকরণ (৭.৮১) হতে $\mathbf{S}_{rav}$ এর মান সমীকরণ (৭.৭৮) এ বসালে

$$R = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{or}^2\,\mathbf{n}_r.\mathbf{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{oi}^2\,\mathbf{n}_i.\mathbf{n}}$$

$$= \frac{E_{or}^2\cos\theta_r}{E_{oi}^2\cos\theta_i} = \frac{E_{or}^2}{E_{oi}^2} \qquad \left[\begin{array}{l}\because\ \mathbf{n}_r.\mathbf{n} = \cos\theta_r \\ \mathbf{n}_i.\mathbf{n} = \cos\theta_i \\ \text{এবং } \theta_r = \theta_i\end{array}\right] \qquad (৭.৮৩)$$

আবার সমীকরণ (৭.৮০) ও (৭.৮২) থেকে যথাক্রমে $\mathbf{S}_{iav}$ ও $\mathbf{S}_{tav}$ এর মান সমীকরণ (৭.৭৯) এ বসায়ে আমরা পাই –

$$T = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{ot}^2\,\mathbf{n}_t.\mathbf{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{oi}^2\,\mathbf{n}_i.\mathbf{n}}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{1/2} \frac{E_{ot}^2}{E_{oi}^2} \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \qquad [\because \mathbf{n}_i.\mathbf{n} = \cos\theta_i\ ]$$

$$= \left(\frac{k_{e_2}}{k_{e_1}}\right)^{1/2} \frac{E_{ot}^2}{E_{oi}^2} \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \qquad [\because \varepsilon = k_e\, \varepsilon_0\ ]$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \frac{E_{ot}^2}{E_{oi}^2} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \qquad [\because \sqrt{k_e} = n\ ] \qquad (৭.৮৪)$$

ডাই-ইলেকট্রিকের জন্য ফ্রেনেলের সমীকরণ (৭.৬০) থেকে $\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)$ এর মান সমীকরণ (৭.৮৩) এ বসালে পাওয়া যায়- -

$$R_N = \left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t}\right]^2 \qquad (৭.৮৫)$$

আবার ফ্রেনেলের সমীকরণ (৭.৫৬) ও সমীকরণ (৭.৮৪) থেকে

$$T_N = \frac{n_2}{n_1} \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cos^2\theta_i}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^2} \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

বা
$$T_N = \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i \cos\theta_t}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^{1/2}} \qquad (৭.৮৬)$$

সুতরাং সমীকরণ (৭.৮৫) + সমীকরণ (৭.৮৬) থেকে দেখা যায়,

$$R_N + T_N = \frac{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_t\right]^2}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^2} + \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i \cos\theta_t}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_t\right]^2 + 4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i\cos\theta_t}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_t\right]^2}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_t\right]^2} = 1 \qquad (৭.৮৭)$$

উপরিউক্ত সমীকরণসমূহে N নির্দেশ করে যে, তরঙ্গটি আপতন তলের সাথে লম্বভাবে পোলারায়িত। পুনরায়, আপতন তলের সাথে সমান্তরালভাবে পোলারায়িত তরঙ্গের জন্য ফ্রেনেলের সমীকরণদ্বয় (৭.৬৬) ও (৭.৬৯) যথাক্রমে সমীকরণ (৭.৮৪) ও (৭.৮৫) তে ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$R_p = \left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t + \cos\theta_i}\right]^2 \qquad (৭.৮৮)$$

$$T_p = \frac{4\,\frac{n_1}{n_2}\cos\theta_i\cos\theta_t}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t + \cos\theta_i\right]^2} \qquad (৭.৮৯)$$

পূর্বের মত এক্ষেত্রেও দেখানো যায় যে,

$$R_p + T_p = 1$$

ব্রিউস্টার কোণে, $R_p = 0$ (পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য) এবং

$$T_p = \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_{iB}\cos\theta_t}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t + \cos\theta_{iB}\right]^2} \qquad (৭.৯০)$$

এখন সমীকরণ (৭.৭৭) থেকে

$$\cos\theta_{iB} = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_{iB}$$

$$= \frac{n_1}{n_2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) \qquad [\because \theta_{iB} = \frac{\pi}{2} - \theta_t]$$

$$= \frac{n_1}{n_2}\cos\theta_t \tag{৭.৯১}$$

সমীকরণ (৭.৯১) থেকে $\cos\theta_{iB}$–এর মান সমীকরণ (৭.৯০) এ বসালে এটি নিম্নরূপ ধারণ করে

$$T_p = \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t \cdot \cos\theta_t}{\left[\frac{n_1}{n_2}\cos\theta_t + \frac{n_1}{n_2}\cos\theta_t\right]^2}$$

$$= \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cos^2\theta_t}{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cos^2\theta_t} = 1 \tag{৭.৯২}$$

সুতরাং ব্রিউস্টার কোণেও

$$R_p + T_p = 0 + 1 = 1 \tag{৭.৯৩}$$

লম্ব আপতনের জন্য $\theta_i = 0, \ \theta_t = 0$ এবং

$$R = R_N = R_P = \left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) - 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1}\right]^2 \tag{৭.৯৪}$$

$$T = T_N = T_P = \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right]^2} \tag{৭.৯৫}$$

এক্ষেত্রেও দেখা যায় যে,

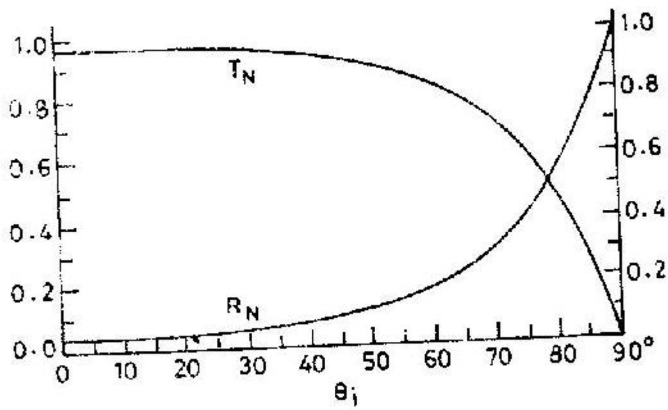
$$R + T = \left[\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) - 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1}\right]^2 + \frac{4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\left[\left(\frac{n}{n_2}\right) + 1\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right) - 1\right]^2 + 4\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right]^2}$$

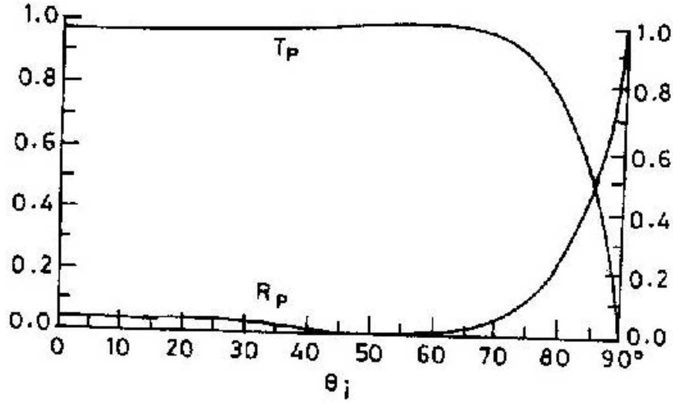
$$= \frac{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right]^2}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right]^2} = 1$$

$$\therefore \qquad R + T = 1 \qquad (৭.৯৬)$$

সুতরাং, সকল ক্ষেত্রেই প্রতিফলন এবং প্রতিসরণের গুণাঙ্কদ্বয়ের যোগফল 1 এর সমান। চিত্র (৭.১৩) এবং (৭.১৪) এ $\frac{n_1}{n_2} = 1/1.5$ এর জন্য আপতন কোণ (θ_i) এর ফাংশন হিসেবে প্রতিফলনের গুণাঙ্ক R এবং প্রতিসরণের গুণাঙ্ক T কে দেখানো হলো।

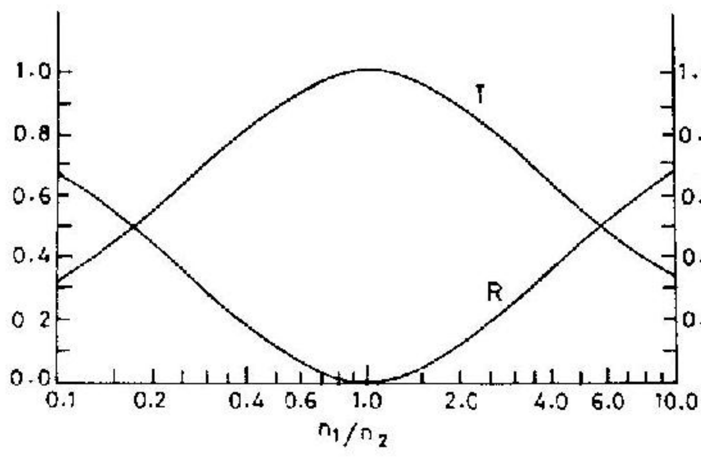


চিত্র ৭.১৫ : $n_1/n_2 = 1/1.5$ এর জন্য আপতন কোণ θ_i এর সাথে প্রতিফলনের সহগ R_N এবং প্রতিসরণের সহগ T_N এর পরিবর্তন; তরঙ্গটি এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের উপর লম্ব।



চিত্র ৭.১৪ : $n_1/n_2 = 1/1.5$ এর জন্য আপতন কোণ θ_i এর সাথে প্রতিফলনের সহগ R_p এবং প্রতিসরণের সহগ T_p এর পরিবর্তন। তরঙ্গটি এমনভাবে পোলারায়িত যে এর E ভেক্টর আপতন তলের সাথে সমান্তরাল।

অপরপক্ষে চিত্র (৭.১৫) এ লম্ব আপতনে $\frac{n_1}{n_2}$ এর ফাংশন হিসেবে R এবং T কে চিত্রায়িত করা হয়েছে।



চিত্র ৭.১৫ : লম্ব আপতনে n_1/n_2 অনুপাতটির সাথে প্রতিফলনের সহগ R এবং প্রতিসরণের সহগ T এর পরিবর্তন।

৭.৫ সুষম সমতল তরঙ্গমালা – সাধারণ অবস্থা (Uniform plane waves–general case)

ধরা যাক, সময়ের সাথে ক্ষেত্র ভেক্টরসমূহের পরিবর্তন $e^{j\omega t}$ ফাংশন অনুসারে সম্পাদিত হয়। তাহলে $\frac{\partial}{\partial t}$ এবং $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ কারকদ্বয়কে যথাক্রমে $j\omega$ এবং ω^2 দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়। সুতরাং ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় এবং চতুর্থ (৫.২৫) ও (৫.৩৩) সমীকরণদ্বয় এবং তরঙ্গ সমীকরণ (৬.৫৬) ও (৬.৫৮) দ্বয়কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

(১)
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -j\omega\mu \mathbf{H} \qquad (৭.৯৭)$$

(২)
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \qquad (৭.৯৮)$$

(৩)
$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$= \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\rho = 0 \text{ বিবেচনাধীনে })$$

$$= j\omega\mu\sigma \mathbf{E} - \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E} \qquad (৭.৯৯)$$

(৪)
$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{H} \qquad (৭.১০০)$$

যেখানে
$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta \qquad (৭.১০১)$$

γ–রাশিটি মাধ্যমের একটি ধর্ম এবং স্বকীয় সঞ্চারণ ধ্রুবক (Intrinsic propagation constant) হিসেবে পরিচিত। এটি প্রেরণ লাইন (transmission line) এর সঞ্চারণ ধ্রুবকের সাথে উপমেয়। সাধারণত γ একটি জটিল রাশি ($\gamma = \alpha + j\beta$) এর বাস্তব অংশ (α) হলো হ্রাস ধ্রুবক এবং অবাস্তব অংশ হলো দশাধ্রুবক (β)।

পুনরায় কল্পনা করা যাক, একটি তরঙ্গ z দিকে চলমান যার বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র x দিকে এবং চৌম্বক ক্ষেত্র y দিকে। একটি তরঙ্গ যা বৈদ্যুতিক এবং চৌম্বক উভয় ক্ষেত্রেই সঞ্চারণ

দিকের সাথে আড়াআড়ি, তাকে আড় তাড়িত চৌম্বক (TEM) তরঙ্গ বলা হয়। TEM–তরঙ্গের জন্য, xy তলে ক্ষেত্রদ্বয়ে কোনোরূপ পরিবর্তন হয় না।
(অর্থাৎ $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow 0$) বিবেচনা করে সমীকরণ (৭.৯৯) ও (৭.১০০) এর আকার দাঁড়ায়

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \gamma^2 E_x \qquad (৭.১০২)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \gamma^2 H_y \qquad (৭.১০৩)$$

সমীকরণ (৭.১০২) এর সমাধান নিম্ন আকারে লেখা যায় :

$$E_x = E_R' e^{\gamma z} + E_R'' e^{-\gamma z} \qquad (৭.১০৪)$$

এ সমীকরণ থেকে E_x -এর মান (৭.৯৭) এ বসালে, চৌম্বক ক্ষেত্রের মান নিম্নরূপে বের করা যায় :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\,\omega\,\mu\,\mathbf{H}$$

বা
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-j\,\omega\,\mu)\,\mathbf{j}\,H_y$$

বা
$$\mathbf{j}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} = (-\mathbf{j}\,\omega\,\mu)\,\mathbf{j}\,H_y$$

∴
$$\mathbf{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{E}_R' e^{\gamma z} + \mathbf{E}_R'' e^{-\gamma z}\right]$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu}\left[\gamma\, E_R' e^{\gamma z} - \gamma\, E_R'' e^{-\gamma z}\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{j\omega\mu}\left[E_R' e^{\gamma z} - E_R'' e^{-\gamma z}\right] \qquad (৭.১০৫)$$

সুবিধার জন্য, সমীকরণ (৭.১০৫) কে নিম্নরূপে ব্যক্ত করা হলো :

$$H_y = H_R' e^{\gamma z} + H_R'' e^{-\gamma z} \qquad (৭.১০৬)$$

যেখানে
$$H_R' = -\frac{\gamma E_R'}{j\,\omega\,\mu} \quad \text{এবং} \quad H_R'' = \frac{\gamma\, E_R''}{j\,\omega\,\mu}$$

পরবর্তী আলোচনায় ধরা হবে যে, আপতিত তরঙ্গ −y দিকে এবং প্রতিফলিত তরঙ্গ +y দিকে চলে। এই রীতি অনুসারে, সমীকরণ (৭.১০৪) ও (৭.১০৬) এর প্রথম পদযুগল নির্দেশ করে আপতিত তরঙ্গ এবং দ্বিতীয় পদযুগল নির্দেশ করে প্রতিফলিত তরঙ্গ। একটি মাধ্যমের স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা (Intrinsic impedance) এর সংজ্ঞা হলো ঐ মাধ্যমে একটি আপতিত তরঙ্গের বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র প্রখরতা এবং চৌম্বক ক্ষেত্র প্রখরতার অনুপাত। এই সংজ্ঞা ব্যবহার

করে, সমীকরণ (৭.১০৪) ও (৭.১০৬) থেকে আপতিত অথবা প্রতিফলিত তরঙ্গের জন্য বৈদ্যুতিক এবং চৌম্বক ক্ষেত্র প্রখরতার অনুপাত নিম্নরূপে ব্যক্ত করা যায়।

$$\eta = -\frac{E_R'}{H_R'} = \frac{E_R''}{H_R''} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (৭.১০৭)$$

যেখানে η মাধ্যমের স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা। η এর মান প্রতিপাদনের জন্য বিকল্প পদ্ধতি নিম্নে বর্ণনা করা হলো :

পূর্বের মতো সমীকরণ (৭.১০৩) এর সমাধান নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$H_y = H_0' e^{\gamma z} + H_0'' e^{-\gamma z} \qquad (৭.১০৮)$$

এ সমীকরণ থেকে H_y এর মান সমীকরণ (৭.৯৮) এ বসিয়ে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মান নিম্নরূপে প্রতিপাদন করা যায়।

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathbf{E}$$

বা
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathbf{i}E_x$$

বা
$$-\mathbf{i}\frac{\partial H_y}{\partial z} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathbf{i}E_x$$

$$\therefore E_x = -\frac{1}{(\sigma+j\omega\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial z}\left[H_0' e^{\gamma z} + H_0'' e^{-\gamma z}\right] = -\frac{\gamma}{(\sigma+j\omega\varepsilon)}\left(H_0' e^{\gamma z} - H_0'' e^{-\gamma z}\right)$$

বা $$E_x = E_0' e^{\gamma z} + E_0'' e^{-\gamma z} \qquad (৭.১০৯)$$

যেখানে $$E_0' = -\frac{\gamma H_0'}{(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad \text{এবং} \quad E_0'' = \frac{\gamma H_0''}{(\sigma+j\omega\varepsilon)}$$

সুতরাং পূর্বে প্রদত্ত সংজ্ঞানুসারে মাধ্যমের স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা :

$$\eta = \frac{E_0'}{H_0'} = \frac{E_0''}{H_0''} = \frac{\gamma}{\sigma+j\omega\varepsilon} \qquad (৭.১১০)$$

অতএব সমীকরণ (৭.১০৭) ও (৭.১১০) থেকে লেখা যায়

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sigma+j\omega\varepsilon} \qquad (৭.১১১)$$

৭.৬ স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা এবং সঞ্চারণ ধ্রুবক (Intrinsic impedance & Propagation Constant)

স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা এবং স্বকীয় সঞ্চারণ ধ্রুবক হলো, মাধ্যমের ধর্মাবলী। এরা প্রেরণ লাইনের জন্য যথাক্রমে বৈশিষ্ট্য প্রতিবন্ধকতা এবং সঞ্চারণ ধ্রুবকের সাথে উপমেয়। বিশেষ ক্ষেত্রের জন্য, যখন মাধ্যমটি

(ক) একটি ক্ষতিবিহীন ডাই-ইলেকট্রিক বা (খ) একটি সুপরিবাহক, উপরিউক্ত রাশিদ্বয়কে সহজভাবে প্রকাশ করা যায়।

প্রসঙ্গক্রমে, রাশিদ্বয়ের জন্য সমীকরণ দুটি নিম্নে পুনর্লিখিত হলো :

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sigma+j\omega\varepsilon} = \frac{\sqrt{j\omega\mu\,(\sigma+j\omega\varepsilon)}}{\sigma+j\omega\varepsilon}$$

$$= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}} \qquad (৭.১১২)$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\sigma+j\omega\varepsilon)} \qquad (৭.১১৩)$$

এখন একটি ক্ষতিশূন্য ডাই ইলেকট্রিক, যার জন্য আমরা পাই $\sigma = 0$, বিবেচনা করা যাক। তাহলে স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা এবং সঞ্চারণ ধ্রুবক হ্রাস পেয়ে নিম্নরূপ ধারণ করে :

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (৭.১১৪)$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \times j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (৭.১১৫)$$

একটি ক্ষতিশূন্য ডাই-ইলেকট্রিকের স্বকীয় প্রতিবন্ধকতা বিশুদ্ধ রোধের প্রকৃতির হয় এবং মুক্তস্থানের জন্য এর মান 376.6 ওহম। যেহেতু সকল ডাই-ইলেকট্রিক মাধ্যমের প্রবেশ্যতা প্রায় একই ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$) এবং এমন কোনো পরিচিত ডাই-ইলেকট্রিক নেই যার প্রবেশ্যতার মান মুক্তস্থানে এর মানের তুলনায় কম, আমরা বলতে পারি যে পরিচিত সকল ডাই ইলেকট্রিকের মধ্যে স্বকীয় প্রতিবন্ধকতার প্রাপ্তিযোগ্য সর্বোচ্চ মান হলো মুক্ত স্থানের।

ক্ষতিশূন্য ডাই ইলেকট্রিকের স্বকীয় সঞ্চারণ ধ্রুবক হলো অবাস্তব, ফলস্বরূপ আমরা পাই $\alpha = 0$ এবং $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ । সমতল তরঙ্গের জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং দশাবেগ হলো —

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (৭.১১৬)$$

$$v = f\lambda = \frac{2\pi f}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (৭.১১৭)$$

এখন বিবেচনা করা যাক, মাধ্যমটি হলো একটি সুপরিবাহক। আমরা জানি যে, একটি সুপরিবাহকে $\sigma >> \omega\varepsilon$ । শ্রব্য কম্পাঙ্ক হতে মাইক্রো তরঙ্গ কম্পাঙ্ক পর্যন্ত বিস্তৃত কম্পাঙ্ক পরিসরের জন্য এটি সত্য

উদাহরণস্বরূপ, সিলভার (যার পরিবাহিতা $\sigma = 6.14 \times 10^7$ (ওহম/মি:)$^{-১}$) এর কথা ধরা যাক।

$\varepsilon = \varepsilon_0$ কল্পনা করে, $f = 10^{11}$ চক্র/সে. কম্পাঙ্কতে

$$\omega\varepsilon = 2\pi f\varepsilon_0$$
$$= 2 \times 3.14 \times 10 \times 8.85 \times 10^{-12}$$
$$\approx 5.6$$

সুতরাং $\omega\varepsilon$ এর মান $\sigma\ (=6.14 \times 10^7\ )$ এর তুলনায় অতি নগণ্য। স্পষ্টত সুপরিবাহকের জন্য আমরা ধরে নিতে পারি যে $\sigma >> \omega\varepsilon$ । এই বিবেচনাধীনে সমীকরণ (৭.১১২) ও (৭.১১৩)–এর রূপ দাঁড়ায় :

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \tag{৭.১১৮}$$

$$\gamma = \sqrt{j\ \omega\ \mu\ \sigma} \tag{৭.১১৯}$$

এখন ধরা যাক,

$$\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (a + jb)$$

$$\therefore \qquad \frac{j\omega\mu}{\sigma} = (a + jb)^2 = a^2 - b^2 + j2ab \tag{৭.১২০}$$

উভয় পার্শ্ব হতে বাস্তব এবং অবাস্তব পদসমূহ সমীকৃত করে

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \therefore \quad a = b \tag{৭.১২১}$$

এবং $\qquad 2ab = \frac{\omega\mu}{\sigma}$

বা $\qquad 2a^2 = \frac{\omega\mu}{\sigma} \qquad$ (সমীকরণ (৭.১২১) অবলম্বনে)

$$\therefore \qquad a = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{৭.১২২}$$

অতএব সমীকরণ (৭.১২১) ও (৭.১২২) অবলম্বনে সমীকরণ ৭.১১৮ কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\left(\cos 45^\circ - j\sin 45^\circ\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\, e^{j45^\circ} \tag{৭.১২৩}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ ** \tag{৭.১২৪}$$

একইভাবে দেখানো যায় যে,

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{j\omega\mu\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \\ &= \alpha + j\beta \qquad (৭.১২৫)\end{aligned}$$

সমীকরণ (৭.১২৫) হতে হ্রাস ধ্রুবক, দশা ধ্রুবক, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং দশাবেগ পাওয়া যায় এবং এদের মান নিম্নে দেয়া হলো :